



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10029>

To cite this version :

Ali Akbar ABBASIAN ARANI, Didier LASSEUX, Azita AHMADI-SENICHAULT - Résolution numérique de l'écoulement diphasique en milieu poreux hétérogène incluant les effets inertiels - In: Colloque Franco-Tunisien « Les Milieux Poreux », Tunisie, 2007-04-13 - Proceeding du Colloque Franco-Tunisien « Les Milieux Poreux » - 2007

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



Résolution numérique de l'écoulement diphasique en milieu poreux hétérogène incluant les effets inertiels

Ali Akbar ABBASIAN ARANI, Didier LASSEUX et Azita AHMADI

TREFLE-ENSAM, UMR CNRS 8508, Esplanade des Arts et Métiers 33405 Talence Cedex France

e-mail : didier.lasseux@bordeaux.ensam.fr

RESUME

La mise en place d'un outil numérique 3D de simulation d'écoulement diphasique hors régime de Darcy basé sur le modèle de Darcy-Forchheimer généralisé est présentée. L'outil est tout d'abord validé à l'aide d'une solution semi analytique 1D de type Buckley-Leverett. Des résultats obtenus dans différentes configurations homogène et hétérogènes 1D et 2D mettent en évidence l'importance des termes inertiels en fonction d'un nombre de Reynolds de l'écoulement.

MOTS CLES

Milieu poreux, écoulement diphasique, régime hors Darcy, Darcy-Forchheimer, simulation numérique.

INTRODUCTION

L'exploitation d'un réservoir d'hydrocarbures par injection d'eau ou de gaz peut conduire, dans certaines conditions -à l'approche des puits et/ou dans le cas de milieux très perméables notamment- à des vitesses d'écoulement élevées telles que la description de l'écoulement diphasique en milieu poreux par un modèle de Darcy classique n'est plus valable [1-3]. Il est alors nécessaire de faire appel à un modèle d'écoulement plus complet qui fait intervenir un terme supplémentaire inertiel dans les équations de bilan de quantité de mouvement. L'écoulement est diphasique isovolume instationnaire et à nombre de Reynolds suffisamment élevé pour justifier l'utilisation d'un modèle incluant les termes inertiels. Le modèle physique retenu est celui de Darcy-Forchheimer généralisé [4, 5]. On considère que le milieu hétérogène est constitué de plusieurs régions homogènes, chacune d'elle ayant des propriétés de transport isotropes à l'échelle de Darcy. On note avec les indices "w" et "o" les phases mouillante et non mouillante respectivement et on s'intéresse, sans que cela soit restrictif dans la démarche numérique, au cas de l'imbibition.

1. MODELE PHYSIQUE

Dans le cas des écoulements diphasiques en milieu poreux à nombre de Reynolds très faible, le modèle physique d'écoulement le plus largement

admis et justifié théoriquement est celui de Darcy généralisé [6, 7]. Pour les nombres de Reynolds élevés, celui-ci est mis en défaut du fait de termes inertiels significatifs dans le modèle de base à l'échelle du pore. Cependant, il n'y a pas eu à ce jour de formalisation théorique complète d'un modèle à l'échelle du bloc de milieu poreux. De manière largement empirique, un modèle classiquement utilisé est celui de Darcy-Forchheimer généralisé. Il est basé d'une part sur le modèle monophasique de Darcy-Forchheimer [8] établi depuis de manière théorique [9, 10] et d'autre part sur une généralisation au cas diphasique comme celle qui s'applique en régime de Darcy. Ce modèle fait appel à une correction quadratique en vitesse et s'écrit (α dans toute la suite désigne la phase "o" ou la phase "w"):

$$-(\nabla P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) = \mu_\alpha \mathbf{K}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{V}_\alpha + \rho_\alpha \|\mathbf{V}_\alpha\| \boldsymbol{\beta}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\alpha \quad (1)$$

A cette équation de conservation de la quantité de mouvement, il faut adjoindre l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_\alpha) + \nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha = 0 \quad (2)$$

ainsi que les relations de pression capillaire et de saturations

$$P_c(S_w) = P_o - P_w \quad (3)$$

$$S_w + S_o = 1 \quad (4)$$

Dans ces relations, P_α , μ_α , ρ_α , \mathbf{V}_α , \mathbf{K}_α et S_α sont respectivement la pression, la viscosité dynamique, la masse volumique, la vitesse de Darcy, le tenseur de perméabilité effective et la saturation de la phase α . Par ailleurs ϕ est la

porosité du milieu poreux et β_α est un coefficient (a priori tensoriel) généralement appelé facteur de résistance inertiel (effectif). De manière classique, on écrit aussi, compte tenu de l'isotropie des milieux, $\mathbf{K}_\alpha = K k_{r\alpha} \mathbf{I}$ et $\beta_\alpha = \beta \beta_{r\alpha} \mathbf{I}$, $k_{r\alpha}$ et $\beta_{r\alpha}$ étant des fonctions non linéaires de la saturation. Des relations empiriques corrélant ce facteur à la porosité et à la perméabilité effective ont été proposées dans la littérature [11-13]. Ici, nous choisissons $\beta_\alpha = 2,923 \cdot 10^{-6} \tau / \phi K_\alpha$, comme proposé par [13], τ étant la tortuosité du milieu et en accord avec [14]

$$\beta_{r\alpha} = k_{r\alpha}^{-1} \quad (5)$$

Pour des questions pratiques de discrétisation, on reformule les équations de conservation précédentes en introduisant la vitesse totale définie par $\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_o + \mathbf{V}_w$. En choisissant P_o et S_w comme inconnues, le problème aux limites s'écrit :

$$\nabla \cdot \left(\begin{array}{l} -\mathbf{M}_o + M_w \overline{\nabla} P_o \\ + M_w \nabla P_c + \mathbf{M}_w \rho_w + M_o \rho_o \overline{\mathbf{g}} \end{array} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\mathbf{M}_w \overline{\nabla} P_o - \nabla P_c - \rho_w \overline{\mathbf{g}} \right) = 0 \quad (7)$$

$$P_o = P_{imposée} \text{ ou } \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = V_{imposée} \text{ à l'entrée} \quad (8)$$

$$S_w = 1 - S_{or} \text{ à l'entrée} \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur les faces latérales} \quad (10)$$

$$\text{En sortie} \begin{cases} P_o = P_{atm} \\ \text{Si } S_w < 1 - S_{or}, \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \text{Fin de simulation sinon} \end{cases} \quad (11)$$

La simulation débute avec des valeurs de P_o et S_w fixées sur tout le domaine. On notera que la condition à la limite dans (11) traduit un classique « effet d'extrémité » [15]. Dans la situation où le milieu est hétérogène, il convient également d'écrire des conditions aux limites à l'interface $A_{\omega\eta}$ entre deux régions ω et η sous la forme

$$\left[\mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} \right] = \left[\mathbf{V}_o \cdot \mathbf{n} \right] = 0 \text{ sur } A_{\omega\eta} \quad (12)$$

$$\left[P_w \right] = \left[P_o \right] = 0 \text{ sur } A_{\omega\eta} \quad (13)$$

où $\left[\psi \right]$ est le saut de ψ à l'interface et \mathbf{n} la normale unitaire à $A_{\omega\eta}$. Dans les équations (6) à (11), \mathbf{n} désigne la normale unitaire sur la face considérée tandis que M_α désigne la mobilité dans la phase α donnée par :

$$M_\alpha = \left[\frac{\mu_\alpha}{K_\alpha} \left(1 + k_{r\alpha} \beta_{r\alpha} \text{Re}_\alpha \right) \right]^{-1} \quad (14)$$

Dans cette expression, Re_α désigne le nombre de Reynolds associé à la phase α donné par :

$$\text{Re}_\alpha = \frac{\rho_\alpha \|\mathbf{V}_\alpha\| K \beta}{\mu_\alpha} \quad (15)$$

Compte tenu du choix pour $\beta_{r\alpha}$ fait dans (5), l'importance des effets inertiels relativement aux effets visqueux dans la phase α peut être appréciée en comparant Re_α à l'unité. Pour une simulation à pression ou débit imposé à l'entrée, sur un milieu éventuellement hétérogène, le Reynolds caractéristique, Re , de l'écoulement est pris comme étant la valeur maximale de l'expression donnée dans l'équation (15) pour les deux phases sur toutes les régions composant le milieu. Enfin, Les quantités P_c , K_α et β_α sont des données du problème et nous les traitons comme des fonctions de S_w uniquement.

Pour discrétiser le système d'équations en espace, nous utilisons une méthode de volumes finis et un schéma amont d'ordre 1 pour estimer les mobilités. Le schéma en temps, identique à celui utilisé dans le cas du problème diphasique classique en régime de Darcy, est de type IMPES dans lequel la pression en huile est déterminée implicitement et la saturation en eau est calculée de manière explicite [16]. Pour le pas de temps, nous utilisons un critère physique qui stipule qu'au cours d'un pas de temps, chaque maille ne peut être traversée par un volume de fluide supérieur au volume de pore qu'elle contient, i.e.

$$\Delta t \leq \frac{\delta \phi \Delta x \Delta y \Delta z}{V_{tx} \Delta y \Delta z + V_{ty} \Delta x \Delta z + V_{tz} \Delta x \Delta y} \quad (16)$$

où Δx , Δy et Δz sont les pas d'espace et δ est strictement inférieur à 1. Cette condition est en fait une forme simplifiée de la condition de stabilité globale du schéma [17].

Une attention particulière doit toutefois être portée au terme non linéaire de correction de Forchheimer. Pour le traiter, nous avons utilisé trois schémas en temps : un schéma purement explicite, un schéma d'Adams-Bashford à 2 pas et un schéma point fixe sur les vitesses.

2. RESULTATS

2.1. VALIDATION

L'outil numérique développé a été validé en utilisant une solution semi-analytique de type

“Buckley-Leverett”. La résolution analytique du système d'équations décrivant l'écoulement diphasique inertiel 1D à vitesse imposée en entrée, sans gravité et avec $\partial P_c / \partial x = 0$ en milieu poreux homogène conduit à un déplacement frontal classique similaire à celui obtenu pour les écoulements diphasiques 1D en régime de Darcy [18] :

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + W \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

Ici,

$$W = \frac{V_t}{\phi} \frac{df_w}{dS_w} \quad (18)$$

f_w représentant le débit fractionnaire de la phase w donnée par :

$$f_w = \frac{-a + \left(a^2 + 4V_t b \left(\frac{\mu_o}{K_o} + \rho_o \beta_o V_t \right) \right)^{1/2}}{2bV_t} \quad (19)$$

$$a = \frac{\mu_o}{K_o} + \frac{\mu_w}{K_w} + 2\rho_o \beta_o V_t \quad (20)$$

$$b = \rho_w \beta_w - \rho_o \beta_o \quad (21)$$

Le débit est imposé à l'entrée du milieu et le

L'équation (17) est une équation de transport hyperbolique sur S_w dont la résolution se fait classiquement à l'aide de la méthode des caractéristiques et la méthode de la tangente de Welge afin d'obtenir les profils de saturation [15]. Physiquement elle traduit le déplacement d'un choc à la vitesse W correspondant à un front de saturation constante.

| $K[m^2]$ | ϕ | $\beta [m^{-1}]$ | τ |
|-----------------|----------------------|-------------------|-------------------|
| 10^{-11} | 0.4 | $1.39 \cdot 10^6$ | 1.9 |
| k_{rw} | $\rho_w [kg.m^{-3}]$ | S_{wi} | $\mu_w [Pa.s]$ |
| S_w^{*2} | 1000 | 0.1 | 10^{-3} |
| k_{ro} | $\rho_o [kg.m^{-3}]$ | S_{or} | $\mu_o [Pa.s]$ |
| $(1 - S_w^*)^2$ | 900 | 0.1 | $5 \cdot 10^{-3}$ |

Tableau 1 : Valeurs des paramètres pour la simulation 1D en milieu homogène.

La résolution numérique dans ce cas a permis de mettre en évidence que le schéma point fixe conduit au meilleur résultat sur la solution en $S_w(x,t)$ en comparaison des deux autres schémas en temps quelque soient les pas d'espace et de

temps. Pour cette raison, ce schéma a été retenu dans toute la suite de l'étude. La comparaison très satisfaisante (figure 1) entre la résolution numérique directe et la solution semi analytique (voir les valeurs des paramètres dans le tableau 1 où $S_w^* = (S_w - S_{wi}) / (1 - S_{or} - S_{wi})$) permet de valider l'algorithme de résolution dans ce cas particulier.

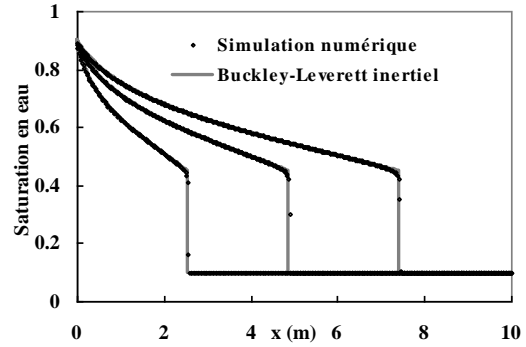


Figure 1: Champ de saturation à $t=10.4s, 20s, et 30.4s$ obtenus par la simulation numérique directe et par la méthode semi-analytique de type Buckley-Leverett.

2.2. COMPARAISON DES REGIMES DE DARCY ET INERTIEL

Nous montrons ici l'intérêt et la nécessité d'utiliser un modèle inertiel pour des valeurs de Re non négligeables devant l'unité dans le cas de milieux homogène 1D et hétérogènes 1D et 2D. Nous mettons l'accent sur la cinétique et la structure des champs de saturation en comparant des simulations réalisées à l'aide du modèle de Darcy d'une part et du modèle de Darcy-Forchheimer retenu ici d'autre part.

Cas homogène 1D

Les résultats de simulations obtenues pour deux valeurs de Re (0.14 et 1.4) dans le cas 1D homogène (voir propriétés du tableau 1) avec $P_c(S_w^*) = 500 (-S_w^*)^2 Pa$ et une condition de débit imposé à l'entrée sont présentés sur les figures 2 et 3. La comparaison entre les deux modèles d'écoulement met clairement en évidence, comme attendu, que la cinétique du front est ralentie par les effets inertiels et ce de manière non négligeable même pour $Re=0(0.1)$. L'utilisation d'un modèle de Darcy pur peut donc dans la pratique conduire à une sous-estimation significative du temps de percée. Par ailleurs, pour des conditions données, le modèle de Darcy-

Forchheimer prévoit une meilleure efficacité de balayage à l'instant de la percée.

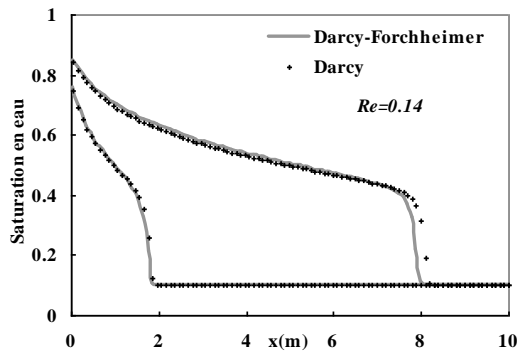


Figure 2: Champ de saturation à $t=30s$ et $145s$ pour les modèles de Darcy et de Darcy-Forchheimer. $Re=0.14$. Milieu homogène.

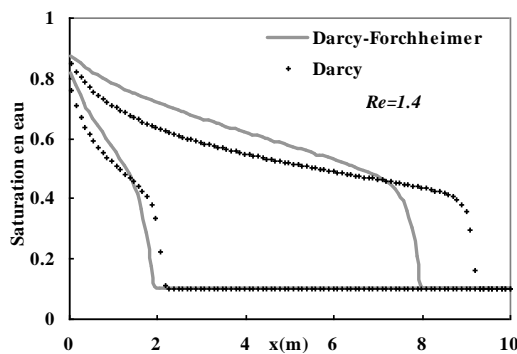


Figure 3: Champ de saturation à $t=3.5s$ et $16.5s$ pour les modèles de Darcy et de Darcy-Forchheimer. $Re=1.4$. Milieu homogène.

Cas hétérogène 1 D

Nous considérons ici un milieu à deux régions ω et η d'axe x dont les propriétés sont rappelées dans le tableau 2 avec de plus des valeurs de densité et de viscosité dynamique pour les deux fluides identiques à celles du tableau 1. L'écoulement 1D d'axe x est simulé avec une condition de débit imposé à l'entrée dans le milieu le moins perméable (ω).

| | Région η | Région ω |
|------------------|--------------------|--------------------|
| $K[m^2]$ | 10^{-10} | 10^{-11} |
| $\beta [m^{-1}]$ | $1.274 \cdot 10^5$ | $2.468 \cdot 10^6$ |
| k_{rw} | S_w^{*3} | S_w^{*2} |
| k_{ro} | $(1-S_w^*)^3$ | $(1-S_w^*)^2$ |
| ϕ | 0.436 | 0.225 |
| S_{or} | 0.185 | 0.178 |
| S_{wi} | 0.385 | 0.295 |
| $P_c [Pa]$ | $500 (-S_w^*)^2$ | $5000 (-S_w^*)^2$ |

Tableau 2 : Valeurs des paramètres pour la simulation 1D en milieu hétérogène.

Les résultats d'évolution des fronts de saturation le long du milieu obtenus à l'aide du modèle de Darcy d'une part et de Darcy-Forchheimer d'autre part sont représentés sur la figure 4.

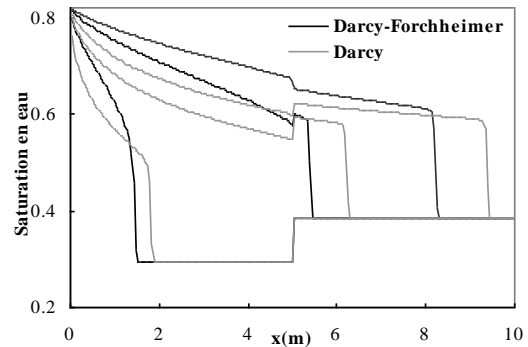


Figure 4: Champ de saturation à $t=1.2s$, $3.6s$ et $8.4s$ pour les modèles de Darcy et de Darcy-Forchheimer. $Re=2.46$. Milieu hétérogène à deux régions ω et η de 5m chacune.

Comme dans le cas homogène, on observe bien un ralentissement important du front lorsque les effets inertiels sont pris en compte. On notera aussi que la simulation reproduit bien un saut de saturation à l'interface entre les deux régions. Ce phénomène est une conséquence directe de l'égalité des pressions dans chaque phase (et donc de la pression capillaire) dans les deux régions sur l'interface restituant une discontinuité de la saturation. Comme on le voit sur la figure 4, le signe de cette discontinuité peut être modifié selon que le modèle de description de l'écoulement intègre les effets inertiels ou non. En plus de la modification de la cinétique du front de saturation, ce dernier résultat remarquable souligne toute l'importance du choix du modèle d'écoulement.

Cas hétérogène 2D

Dans ce paragraphe, on étudie l'impact de la prise en compte des effets inertiels dans des cas de milieux hétérogènes bidimensionnels de type stratifiés avec écoulement parallèles aux strates et nodulaires. Les propriétés des milieux et des fluides sont identiques à celles utilisées dans le cas hétérogène 1D. Les simulations ont été réalisées avec une condition à la limite de pression imposée à l'entrée des milieux.

Nous avons reporté sur la figure 5 les champs de saturation obtenus numériquement à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer dans le milieu stratifié pour $Re=6.3 \cdot 10^{-3}$ (correspondant à une différence de pression de $5 \cdot 10^3$ Pa entre l'entrée et la sortie du milieu de longueur 1m). Pour ce faible gradient de pression, la différence de

pression capillaire et de gradient de pression capillaire entre les deux régions conduit à un champ de saturation relativement perturbé à l'interface entre les deux régions, et ce quel que soit le maillage en espace et le pas de temps utilisés. Ce mécanisme est le résultat de la succion capillaire orthogonale aux strates de la région la plus perméable η vers la moins perméable ω où les effets capillaires sont dix fois plus grands, effet qui domine devant l'écoulement imposé selon l'axe des strates. Cet effet disparaît lorsque le contraste de pression capillaire est plus petit (par exemple $P_c = 4000 \left(-S_w^* \right)$ Pa dans η et $P_c = 5000 \left(-S_w^* \right)$ Pa dans ω).

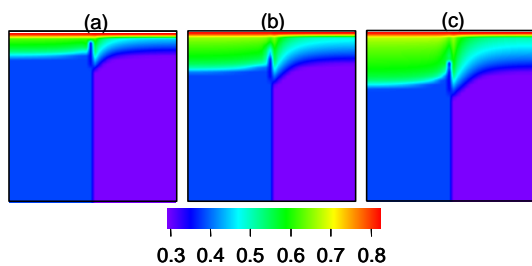


Figure 5: Champ de saturation en eau à (a) $t=100s$ (b) $200s$ et (c) $300s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer. $Re=6.3 \cdot 10^{-3}$.

Pour des nombres de Reynolds plus élevés (par exemple $Re=3.1$, voir figure 6), les champs de saturation obtenus avec ou sans pression capillaire sont identiques et présentent une discontinuité monotone à l'interface entre les deux strates.

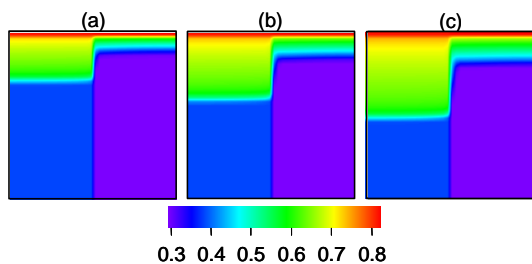


Figure 6: Champ de saturation en eau à (a) $t=0.22s$ (b) $0.33s$ et (c) $0.44s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer. $Re=3.1$.

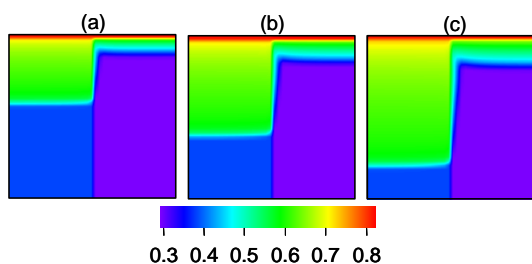


Figure 7: Champ de saturation en eau à (a) $t=0.22s$ (b) $0.33s$ et (c) $0.44s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy.

La simulation réalisée avec les mêmes paramètres mais en utilisant un modèle de Darcy met bien en évidence une avancée du front plus rapide comme attendu (figure 7). On notera toutefois que cette différence est assez peu marquée dans la strate la moins perméable.

Dans le cas nodulaire où l'inclusion est la zone la moins perméable (ω), la simulation d'imbibition réalisée à $Re=6.3 \cdot 10^{-3}$ (correspondant à une différence de pression de $5 \cdot 10^3$ Pa entre l'entrée et la sortie du milieu de longueur 1m) (voir champ de S_w sur la figure 8) montre que lorsque les effets capillaires dominent, ils induisent des écoulements transverses et des sauts de saturations relativement perturbés conduisant à du piégeage de la phase huile dans la zone la moins perméable.

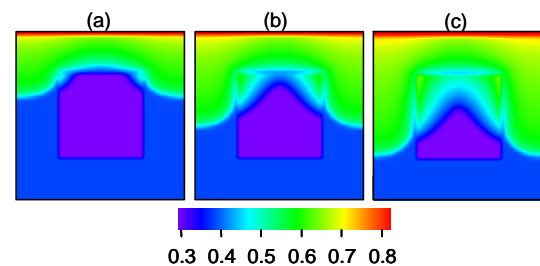


Figure 8: Champ de saturation en eau à (a) $t=100s$ (b) $200s$ et (c) $300s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer. $Re=6.3 \cdot 10^{-3}$.

Ceci est bien mis en évidence sur la figure 9) où le champ de vitesse dans l'eau est superposé au champ de saturation dans cette phase à $t=600s$.

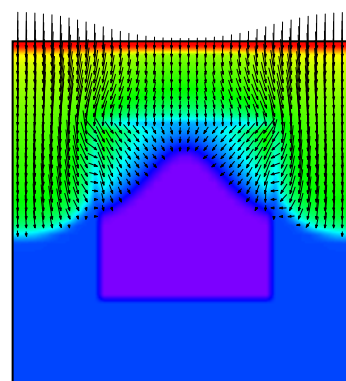


Figure 9: Champ de vitesse dans la phase w superposée au champ de S_w de la figure 8 ($t=600s$).

On s'intéresse maintenant au cas où Re est suffisamment grand pour que les effets capillaires soient négligeables (on vérifie dans ce cas que les simulations sans pression capillaire ou avec celles du tableau 2 conduisent aux mêmes champs de S_w). La comparaison entre les résultats obtenus à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer d'une part (figure 10) et de Darcy d'autre part (figure 11)

mettent en évidence, comme dans le cas stratifié que : i) la cinétique du front de saturation est plus lente lorsque les effets inertiels sont pris en compte, ii) ce ralentissement est peu marqué dans la zone la moins perméable, iii) rélenti lorsque

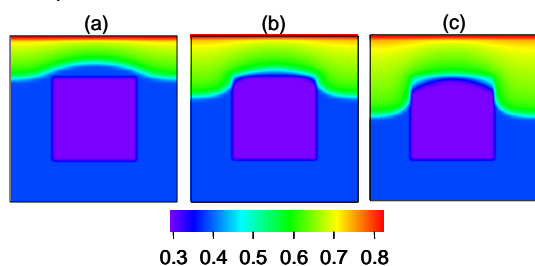


Figure 10: Champ de saturation en eau à (a) $t=0.22s$ (b) $0.33s$ et (c) $0.44s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy-Forchheimer et une différence de pression de $99 \cdot 10^5$ Pa entre l'entrée et la sortie. $Re=3.1$.

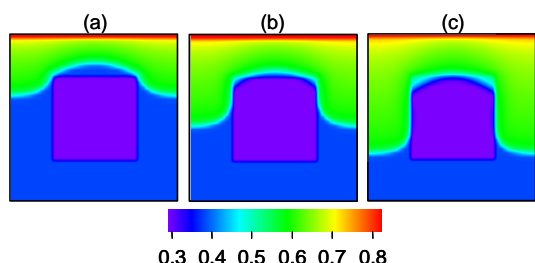


Figure 11: Champ de saturation eau à (a) $t=0.22s$ (b) $0.33s$ et (c) $0.44s$ obtenus à l'aide du modèle de Darcy et une différence de pression de $99 \cdot 10^5$ Pa entre l'entrée et la sortie.

CONCLUSIONS

Dans ce travail, nous avons mis en place, validé et utilisé un outil de simulation numérique des déplacements diphasiques inertiels sur la base d'un modèle de Darcy-Forchheimer. Des exemples de résultats obtenus sur des structures homogènes 1D et hétérogènes 1D et 2D montrent que la prise en compte des effets inertiels est déterminante lorsque le nombre de Reynolds (défini de manière appropriée) est non négligeable devant l'unité. Ces effets conduisent notamment à : i) ralentir la cinétique de propagation du front de saturation et ce de manière plus marquée dans les zones les plus perméables dans le cas de structures hétérogènes ; ii) des sauts de saturation aux interfaces en milieu hétérogène qui peuvent être inversés par rapport à ceux prédits à l'aide d'un modèle de Darcy lorsque les effets inertiels dominent, iii) des fronts de saturation aux interfaces beaucoup plus réguliers entre zones dans certains cas de structures hétérogènes et ce à cause de la diminution des écoulements capillaires transverses.

REFERENCES

- [1] Tek, M.R; Coats, K.H.; Katz, D.L., 1962, *The effect of turbulence on flow of natural gas through porous reservoirs*, J. Petrol. Technol. Trans. AIME **222**, 799-806.
- [2] Scheidegger, A. E., 1972, *The physics of flow through porous media*, University of Toronto Press.
- [3] Katz, D. L. and Lee, R. L., 1990, *Natural gas Engineering, Production and storage*, Chemical Engineering series, McGraw-Hill, New York.
- [4] Schulenberg, T. and Muller, V., 1987, *An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles*, International Journal of Multiphase Flow, **13**, 87-97.
- [5] Wang, X., Thauvin, F. and Mohanty, K.K., 1999, *Non-Darcy flow through anisotropic porous media*, Chemical Engineering Science **54**, 1859-1869.
- [6] Muskat, M., 1937, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, International Human Resources Development, Reprint 1982.
- [7] Whitaker, S., 1986, *Flow in Porous Media II: The Governing Equation for Immiscible, Two-Phase Flow*, Transport in Porous Media **2**, 105-125.
- [8] Forchheimer, 1901, *Wasserbewegung durch boden*, Z. Ver. Deutsch Ing, **45**, 1782-1788.
- [9] Whitaker, S., 1996, *The Forchheimer equation: a theoretical development*, Transport in Porous Media **25**, 27-61.
- [10] Skjetne, E. and Aurialt, J.L., 1999, *New insights on steady, non-linear flow in porous media*, **18** (1) 131-145.
- [11] Evans, R. D., Hudson, C. S.; Greenle, J. E., 1987, *The effect of an immobile liquid saturation on the non-Darcy flow coefficient in porous media*, J. SPE Prod. Engng Trans. AIME **283**, 331-338.
- [12] Evans, E. V. and Evans, R. D., 1988, *Influence of an immobile or mobile saturation on non-Darcy compressible flow of real gases in propped fractures*, J. Petrol. Technol. **40**(10), 1343-1351.
- [13] Liu, X.; Civan, F.; Evans, R. D., 1995, *Correlations of the non-Darcy flow coefficient*, J. canad. petrol. Technol. **34**(10), 50-54.
- [14] Lipinski, R.J., 1982, *A model for boiling and dryout in particle beds*, Report SAND 82-0756 (NUREG/CR-2646) Sandia labs.
- [15] Marle, C.M., 1972, *Cours de production, Tome IV, Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*, Editions Technip, Paris.
- [16] Aziz, K. and Settari, A., 1979, *Petroleum reservoir simulation*, Applied Science Publishers.
- [17] Ahmadi, A., 1992, *Utilisation de propriétés équivalentes dans les modèles de réservoir: cas des écoulements diphasiques incompressibles*, Thèse de l'université de Bordeaux I.
- [18] Wu, Y.S., 2001, *Non-Darcy displacement of immiscible fluids in porous media*, Water Resources Research **37**(12), 2943-2950.