



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/6598>

#### **To cite this version :**

Rania MERHEB, Laurent MORA, Elena PALOMO - L'analyse par intervalles pour une prévision fiable du comportement des bâtiments : cas d'une paroi multicouche - 2012

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# L'analyse par intervalles pour une prévision fiable du comportement des bâtiments : cas d'une paroi multicouche

Rania MERHEB<sup>1\*</sup>, Laurent MORA<sup>1</sup>, Elena PALOMO<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Laboratoire I2M, département TREFLE, site ENSAM

Esplanade des Arts et Métiers - 33405 Talence Cedex

\*(rania.merheb@ensam.eu)

**Résumé :** Ce papier vise à démontrer l'intérêt d'employer des méthodes basées sur l'analyse par intervalles pour étudier l'effet des incertitudes, liées aux paramètres d'entrée, sur le comportement des bâtiments. Le cas d'une paroi multicouche est étudié et 2 méthodes sont employées pour borner la fluctuation des températures et des flux internes. Une analyse des résultats nous mène à confirmer notre proposition. Nous obtenons des enveloppes peu pessimistes et de haut niveau de fiabilité avec cette méthode d'analyse par intervalles, avec de plus un temps de calcul plus faible que pour la méthode probabiliste classique.

## Nomenclature

$a$ diffusivité	$\lambda$ conductivité thermique
$C_p$ capacité thermique	$\rho$ masse volumique
$T_i$ température de consigne	$B_i$ nombre de Biot
$h_i$ coefficient d'échange convectif	$\varphi_i$ flux absorbé par la façade
$\Delta x$ pas de maillage	$\Delta t$ pas de temps
$L$ largeurs de la paroi	<i>Indices</i>
$N$ nombre de nœuds	$i$ extérieur, intérieur

## Introduction

Il y a quelques décennies que la conception des bâtiments à haute performance énergétique, ou ce qu'on appelle Bâtiment Basse Consommation (BBC), attire l'intérêt de plusieurs projets de recherche. En France, le secteur du bâtiment est le plus gros consommateur d'énergie parmi tous les secteurs économiques avec une consommation moyenne annuelle proche de 400 kWh d'énergie primaire par m<sup>2</sup> chauffé ce qui entraîne l'émission de 120 millions de tonnes de CO<sub>2</sub> représentant 25 % des émissions nationales et 32,7 millions de tonnes équivalent carbone [1]. Ce secteur contribue donc considérablement à l'émission de gaz à effet de serre. De plus, les ressources naturelles non renouvelables s'épuisent avec le temps ce qui entraîne une hausse importante du coût de l'énergie. D'où la nécessité de concevoir ou rénover les bâtiments dans le but de limiter leur consommation d'énergie.

Dans ce contexte, l'usage d'outils de simulation devient incontournable et leur fiabilité est primordiale. Il est indispensable donc de connaître les sources potentielles d'incertitude dans le domaine de la modélisation thermique des bâtiments d'une part, et de les caractériser et les évaluer d'autre part pour simuler avec pertinence ce nouveau type de bâtiments.

L'état de l'art dévoile une variété d'études déjà menées pour traiter les incertitudes sur les simulations. Elles se divisent essentiellement en 2 catégories : celles dédiées à propager les incertitudes des paramètres d'entrée sur les sorties et d'autres destinées à hiérarchiser les incertitudes par le biais de l'analyse de sensibilité.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à comparer 2 méthodes : une probabiliste de type Monte Carlo et une autre ensembliste d'analyse par intervalles. Nous employons ces 2 méthodes pour borner la température interne et le flux surfacique pour le cas d'une paroi multicouche soumise à des échanges convectifs sur ses faces interne et externe. Pour le choix des paramètres incertains, nous nous sommes référés à des études visant les mêmes intérêts que les nôtres. Dans ([2], [3]), des calculs ont été effectués pour identifier les facteurs d'entrée contribuant majoritairement à l'incertitude des facteurs de sortie, précisément la température de l'air interne. Parmi ces facteurs qui peuvent induire des variations majeures dans le comportement des parois des bâtiments apparaissent les paramètres thermo-physiques des matériaux de construction (la conductivité  $\lambda$  et la capacité thermique  $\rho C_p$ ) et les coefficients d'échange convectifs et radiatifs. Dans notre cas, nous nous limitons à attribuer des incertitudes aux paramètres thermo-physiques de chaque matériau vue leur influence majeure sur l'appréciation du comportement de l'enveloppe des bâtiments.

### 1. L'analyse par intervalles

Cette méthode a été initialement développée par Ramon Moore [4], pour limiter la cumulation des erreurs numériques dues à la représentation des réels suivant un type de codage à précision limitée par les calculateurs électroniques. D'où l'avantage de l'analyse par intervalle où on représente le réel par un intervalle qui le contient, avec garantie que l'intervalle solution contient la vraie solution recherchée.

#### 1.1. Définitions

On peut définir l'intervalle comme étant l'ensemble des réels respectant :

$$[a; b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\} \tag{1}$$

où a et b représentent respectivement la borne minimale et maximale de l'intervalle.

Le calcul par intervalles manipule des opérations arithmétiques, tout comme les réels, mais avec une nouvelle définition :

Par exemple pour additionner 2 intervalles  $X = [\underline{x}; \bar{x}]$  et  $Y = [\underline{y}; \bar{y}]$ ,

$$[\underline{x}; \bar{x}] + [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}] \tag{2}$$

**Exemple 1 :** Si  $X = [4; 5]$  et  $Y = [-1; 1]$ , alors  $X + Y = [4 + (-1); 5 + 1] = [3; 6]$

#### 1.2. Pessimisme

Le calcul par intervalles souffre essentiellement d'un problème de pessimisme, autrement dit le sur-encadrement. En effet, l'intervalle résultant après une série d'opérations mathématiques n'est pas minimal, ce qui fait qu'on obtient des intervalles avec des longueurs très étendues. Ce problème a pour origine 2 phénomènes essentiellement : la dépendance et l'enveloppement.

On détaillera ce problème de dépendance, dans le paragraphe suivant, car c'est lié au calcul des fonctions d'inclusion.

Pour le problème d'enveloppement, il est dû à la représentation d'un ensemble quelconque par un pavé (vecteur d'intervalles).

**Exemple 2 :** Soient,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $[x] = \begin{pmatrix} [-1;0] \\ [1;2] \end{pmatrix}$ , l'évaluation du pavé  $[y] = A \times [x]$  est donnée par  $[y] = \begin{pmatrix} [1;4] \\ [1;2] \end{pmatrix}$ , d'autre part l'ensemble réel  $B = \{Ax / x \in [x]\}$  est donné par le parallélogramme B représenté par la figure 1. On remarque donc qu'un pessimisme est introduit [5].

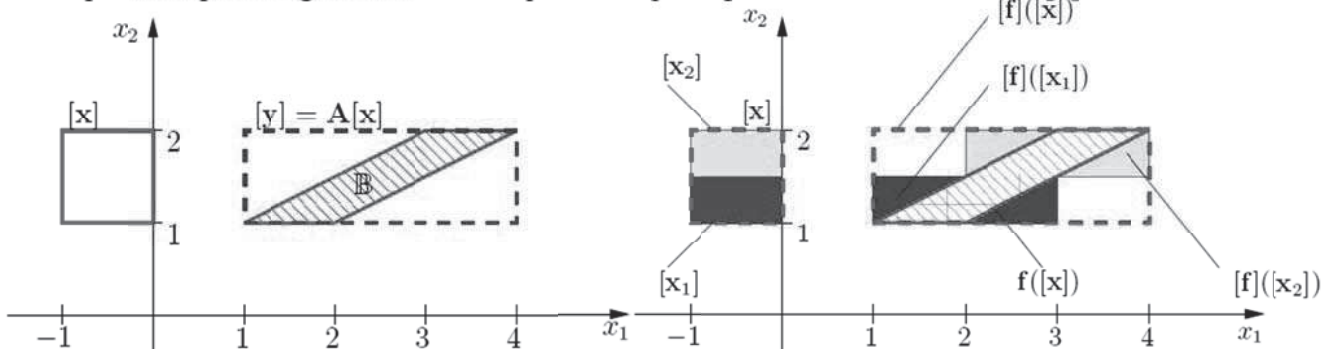


Figure 2: Effet du partitionnement d'un pavé sur une fonction d'inclusion

Une solution pour limiter ce problème, est de partitionner le pavé x en 2 intervalles  $x_1$  et  $x_2$  (figure 2). Pour plus de détails sur ce problème de pessimisme avec d'autres exemples illustratifs, il est fortement conseillé de référer aux travaux ([4], [6], [7]).

### 1.3.Fonctions d'inclusion

Soit une fonction vectorielle  $f : D \subset R^{nx} \rightarrow R^{ny}$ . Une fonction d'inclusion de f, qu'on note [f], est une fonction vérifiant:

$$f([x]) = \{f(x) / x \in [x]\} \subseteq [f]([x]) \tag{3}$$

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique, on peut trouver plusieurs fonctions d'inclusion pour une même fonction vectorielle. C'est là qu'on rencontre le problème de dépendance. Alors selon la façon de formuler la fonction analytique de f on trouve une fonction d'inclusion différente. Cette dernière est d'autant plus pessimiste que le nombre d'occurrence des variables dans l'expression de f (voir exemple ci-dessous). Il est donc important de factoriser au maximum la fonction vectorielle pour réduire ce pessimisme.

**Exemple 3 :** Soit une fonction  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  avec  $x = [-1;3]$ , alors les fonctions d'inclusion qu'on peut trouver pour f sont :

$$[f_1]([x]) = x^2 - 2x + 1 = [-5;12]$$

$$[f_2]([x]) = x(x - 2) + 1 = [-8;4]$$

$$[f_3]([x]) = (x - 1)^2 = [0;4]$$

Par contre, la fonction d'inclusion minimale, qu'on note [f]\* est unique. Dans le cadre de l'analyse par intervalles, on s'intéresse à trouver cette fonction d'inclusion minimale, ou au moins pouvoir utiliser des fonctions d'inclusion peu pessimistes dans le sens où la taille de  $f([x]) - [f]([x])$  est assez petite. Plusieurs méthodes ont été proposées pour le calcul de cette fonction d'inclusion dans ([4], [6]).

## 2. Cas d'étude

Nous considérons le problème de la diffusion de la chaleur en régime variable au travers d'une paroi multicouche d'épaisseur  $L$  ( $L=0.378$  m), dont ses composantes et les caractéristiques correspondantes sont détaillées dans le tableau ci-dessous. Les paramètres thermo-physiques sont dotés d'une incertitude de 3%, leur plage de variation est donnée également par le tableau 1.

On considère des conditions aux limites de 3ème espèce (condition de Fourier), avec des températures internes et externe de type sinus, et on part d'une température initiale  $T_0$  ( $T_0=292^{\circ}\text{k}$ ) sur tous les nœuds.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{dT}{dt} \tag{4}$$

En partant de l'expression (4), qui régit la conduction monodimensionnelle dans les solides, le développement en série de Taylor de la dérivée seconde [8], nous donne l'expression aux dérivées partielles de la température en un nœud  $i$  (intermédiaire) en fonction des températures aux nœuds voisins :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(i,t) = \frac{a}{\Delta x^2} (T(i-1,t) - 2T(i,t) + T(i+1,t)) \tag{5}$$

Pour les nœuds extrêmes, en se servant des conditions aux limites et de la loi de conservation de l'énergie, on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(1,t) = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(1,t) = \frac{a}{\Delta x^2} \left( -2 \left( 1 + \frac{B_{int}}{N} \right) T(1,t) + 2T(2,t) \right) + \frac{a}{\Delta x^2} \frac{2B_{int}}{N} T_{int} \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(N,t) = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(N,t) = \frac{a}{\Delta x^2} \left( -2 \left( 1 + \frac{B_{ext}}{N} \right) T(N,t) + 2T(N-1,t) \right) + \frac{a}{\Delta x^2} \frac{2B_{ext}}{N} T_{ext} \tag{7}$$

où  $N$  est le nombre de nœuds ( $N=26$ ),  $B_i = \frac{h_i L}{\lambda}$  et  $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$

Couche	$\lambda$ [ $\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$ ]	$\rho C_p$ [ $\text{J.m}^{-3}.\text{k}^{-1}$ ]	$L$ [m]
Plaque de plâtre	0,32 [0,3104 ; 0,3296]	680000 [659600 ; 700400]	0,013
Isolant: laine de verre	0,041 [0,0398 ; 0,0422]	10080 [9777 ; 10382]	0,15
Bloc béton creux	1,05 [1,0185 ; 1,0815]	842400 [817128 ; 867672]	0,2
Enduit ciment	1,15 [1,1155 ; 1,1845]	1700000 [1649000 ; 1751000]	0,015

Tableau 1: Composantes de la paroi avec leurs caractéristiques et les incertitudes associées

Le flux surfacique, pour lequel on s'intéresse, est donné par la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{8}$$

### 3. Simulation et Résultats

#### 3.1. Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo a pris naissance dans les années quarante. On peut la définir comme étant une méthode de simulation statistique. Elle est basée sur l'utilisation d'une séquence de nombres aléatoires pour la réalisation de la simulation [9].

Dans notre cas d'étude, les paramètres incertains suivent une loi uniforme. Ce choix particulier de la loi de probabilité, est pour s'assurer que toutes les valeurs tirées au hasard, à chaque simulation, appartiennent bien à la plage de variation considérée.

Nous lançons 500 simulations, avec un pas de temps  $\Delta t$  égal à 20 secondes et pour une période de 24 heures. Après 330 secondes (temps CPU), avec un processeur Intel Core 2 Duo de 2,93 GHz, nous obtenons des encadrements pour les températures et le flux surfacique (figure 3 et 4, lignes continues).

Pour encadrer la température, on procède à rechercher, à chaque instant, les valeurs maximales et minimales prises par la température suite à 500 simulations, donc à 500 choix aléatoires des paramètres incertains.

Pour borner le flux, il suffit d'appliquer l'expression (8), puis rechercher les valeurs maximale et minimale pour ce flux pour les 500 simulations.

#### 3.2. Méthode d'analyse par intervalles

Dans la plupart des cas, les lois de variation des entrées et des paramètres incertains sont inconnus et leur estimation est difficile, voire impossible. Pour la méthode d'analyse par intervalles, nous n'avons pas besoin de connaître ces lois, nous nous intéressons uniquement aux bornes maximale et minimale de l'incertain, et nous considérons que toutes les valeurs comprises entre ces 2 bornes sont équiprobables. Mais cela ne veut pas dire qu'on impose une loi uniforme.

Dans la logique d'analyse par intervalles, encadrer la variation de la température ou du flux, revient à déterminer leur fonction d'inclusion.

Si on remplace directement les paramètres incertains par leur intervalle de variation dans les expressions (5), (6) et (7) afin de calculer la fonction d'inclusion on se retrouve avec une fonction d'inclusion pessimiste. Ce pessimisme est dû au phénomène de dépendance à cause de la multi-occurrence des variables incertaines. Notre but est de calculer des encadrements peu pessimistes. Alors nous procédons autrement pour le calcul des fonctions d'inclusion et nous essayons d'appliquer la méthode proposée dans [10] pour le calcul de ces fonctions. Le principe consiste à surveiller la monotonie des sorties (les températures aux nœuds) vis-à-vis des paramètres incertains ( $\lambda$  et  $\rho C_p$  de chaque matériau) par le biais du calcul des sensibilités. Grâce aux signes de cette sensibilité nous pouvons en déduire si cette sortie est croissante ou décroissante en fonction de la variation des incertains. Dans ce cas le système admet un encadrement sur chaque portion de l'intervalle de temps où la sortie respecte la monotonie par rapport aux paramètres. Les fonctions d'inclusion seront exprimées par 2 systèmes différentiels: un représentant les bornes maximales des températures aux nœuds et un autre représentant les bornes minimales.

Pour revenir à notre cas de test, nous appliquons la méthode décrite ci-dessus dans les mêmes circonstances citées auparavant. Comme nous avons choisi 8 paramètres incertains uniquement ( $\lambda$  et  $\rho C_p$  de chaque matériau), alors nous testons le signe de la sensibilité de la

température interne par rapport à chacun de ces 2 incertains, pour chaque pas de temps  $\Delta t$ , et sur chaque nœud. Puis selon le signe de cette sensibilité nous choisissons la valeur maximale ou minimale des paramètres pour borner chaque température sur chaque portion de l'intervalle d'intégration. Si le signe de la sensibilité est positif, alors on choisit la borne maximale du paramètre considéré pour résoudre le système différentiel correspondant à la borne max de la température, et sa borne minimale pour résoudre l'autre système différentiel servant à minorer la température. Pour le calcul du flux, nous utilisons l'expression (8) avec les températures maximales et minimales obtenues pour les nœuds 1 et 2.

Après 120 secondes (temps CPU) avec le même processeur, nous arrivons à trouver des encadrements pour les températures aux différents nœuds et pour le flux surfacique (figure 3 et 4, lignes discontinues).

### 3.3. Analyse et comparaison

Pour comparer entre les 2 méthodes du point de vue coût de calcul, donc le temps nécessaire pour aboutir aux résultats attendus, c'est clair que notre méthode d'analyse par intervalles est plus efficace, car nous mettons le tiers de temps mis par la méthode de Monte-Carlo pour arriver à borner les températures et le flux.

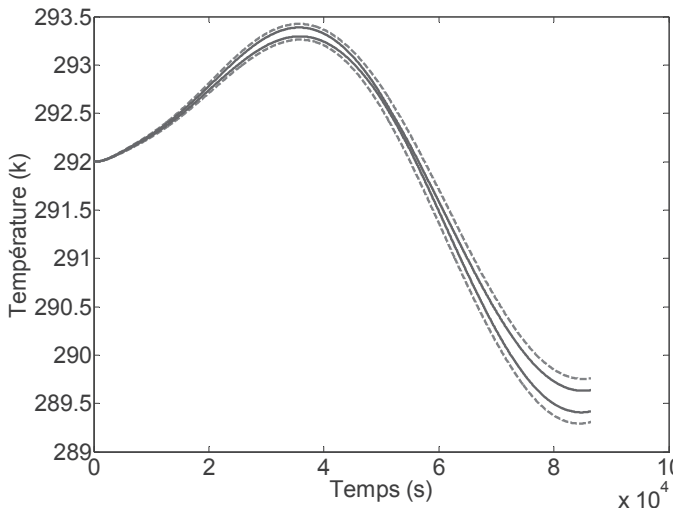


Figure 3 : Les encadrements de la température au nœud 5 donnés par les 2 méthodes

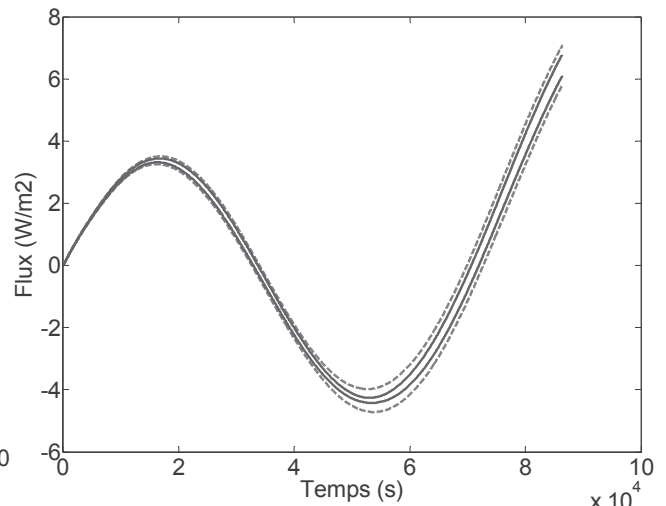


Figure 4 : Les encadrements du flux surfacique donnés par les 2 méthodes

Les figures 1 et 2 montrent que les bornes calculées par la méthode de Monte-Carlo (lignes continues), pour la température et le flux, sont plus serrées donc moins pessimistes. Par contre, nous remarquons que la fonction d'inclusion donnée par cette méthode d'analyse par intervalles, qui n'est pas globalement minimale, ne génère pas trop de pessimisme par rapport aux calculs probabilistes. En plus l'intérêt majeur de cette deuxième méthode c'est de pouvoir calculer l'enveloppe des solutions en une seule simulation: ça revient à résoudre simplement 2 systèmes différentiels en une seule simulation.

### 4. Caractérisation de la méthode ensembliste

Dans ce paragraphe nous cherchons à caractériser la méthode d'analyse par intervalles en étudiant sa sensibilité à plusieurs changements, donc à tester sa robustesse et à essayer de réduire le temps de calcul si c'est possible.

Nous essayons de comparer, dans un premier temps, les encadrements obtenus par notre méthode en faisant augmenter le pas de temps pour réduire davantage le temps de calcul.

Nous constatons selon la figure 5, que l'augmentation du pas de temps (lignes discontinues) engendre une décroissance du niveau de fiabilité car les encadrements sont plus proches. En effet, en augmentant le pas de temps, donc l'intervalle de temps séparant 2 tests de sensibilité, on risque de rater des instants où cette sensibilité change de signe, donc on risque de résoudre les systèmes différentiels correspondants aux bornes minimales et maximales avec les valeurs des paramètres que ne nous donnent pas les températures maximales et minimales que nous recherchons. Par suite, pour garder un haut niveau de fiabilité, nous gardons un petit pas de temps (de 5 secondes) capable de détecter toute variation du signe des sensibilités.

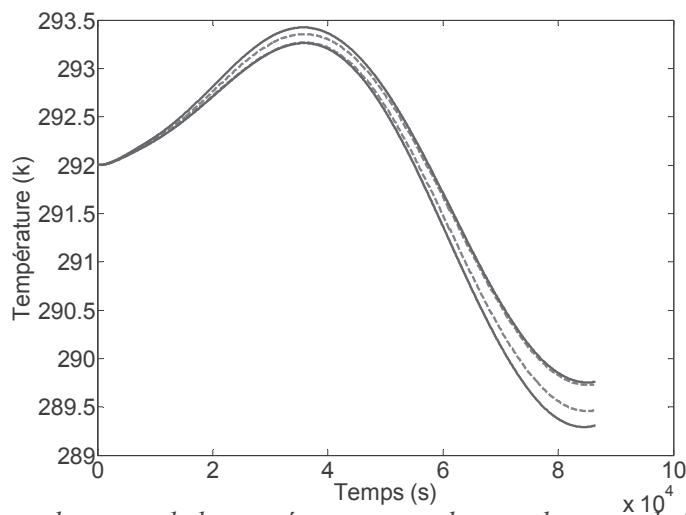


Figure 5 : Les encadrements de la température pour des pas de temps de 5 sec et 120 sec

Nous nous intéressons maintenant à observer les encadrements sur une période de temps plus étendue (5 jours).

Nous observons bien que cette méthode conserve tous ses avantages et ses qualités (figure 6). Cela veut dire que nous pourrions espérer l'utiliser pour encadrer nos sorties tout au long d'une année par exemple.

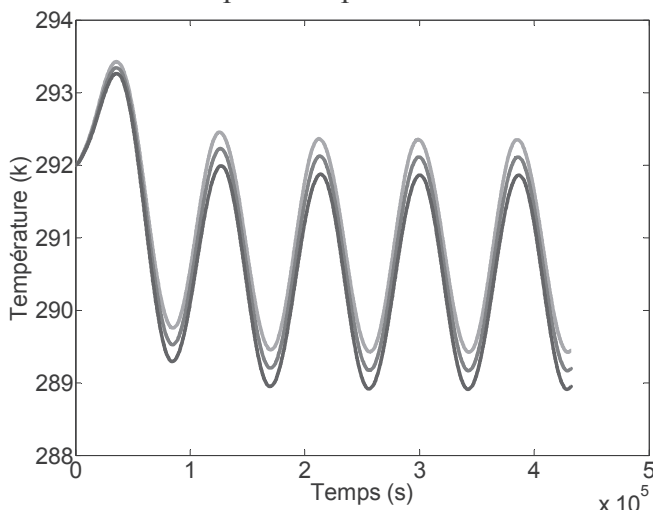


Figure 6 : Encadrement de la température pour une période de 5 jours

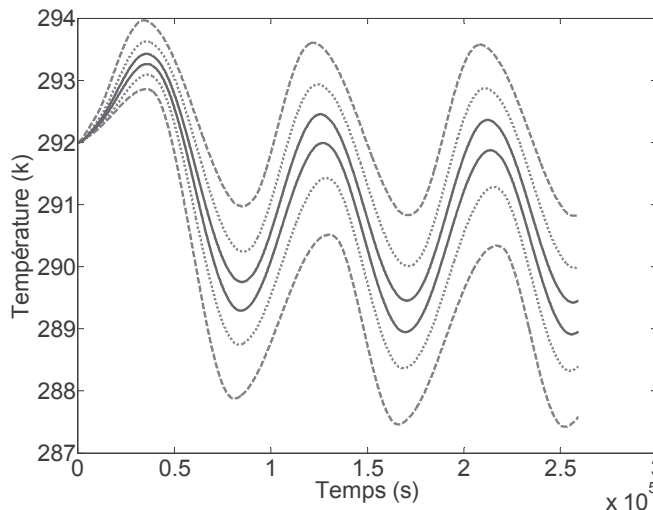


Figure 7 : Encadrement de la température pour des incertitudes de 3, 10 et 20 %

Dans le but d'étudier la sensibilité de cette méthode par rapport aux taux d'incertitudes, nous augmentons les incertitudes associées aux paramètres thermo-physiques de 3 à 10% puis à 20% et nous observons les nouveaux encadrements.



Nous remarquons qu'on garde des bornes maximales et minimales pas très loin des bornes données pour un taux d'incertitudes moins élevé (figure 7). Ce qui prouve que cette méthode est robuste vis-à-vis de l'importance de l'incertitude, et elle est toujours capable de générer des résultats acceptables.

## 5. Conclusions et perspectives

Dans ce papier, nous avons pu démontrer l'intérêt d'employer une méthode d'analyse par intervalles pour propager les incertitudes dans un modèle de transfert de chaleur par diffusion. Les temps de calcul restent inférieurs à ceux nécessaires pour une méthode de Monte-Carlo. Une caractérisation de cette méthode a été faite, où nous avons démontré sa robustesse pour différents valeurs d'incertitudes et pour différentes périodes de temps. Par contre, nous avons pu constater qu'il est nécessaire de conserver un pas de temps réduit afin d'assurer le niveau de fiabilité recherché.

Nous mettons comme perspective de s'approcher davantage de la réalité, donc vers une vraie structure de bâtiment avec différents types d'échange (conductif, convectif et radiatif) et d'essayer de propager les incertitudes d'autres paramètres.

## Références

- [1] Agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie : <http://www2.ademe.fr/servlet/KBaseShow?sort=-1&cid=96&m=3&catid=12846>
- [2] N. Rahni, N. Ramdani, Y. Candau and G. Guyon « Application of exact differential screening analysis to dynamic building energy simulation models », in J. Henriette, P. Lybaert, & M. El Hayeck (Eds.), *Advanced Concepts and Techniques in Thermal Modelling* : p. 99–106, Elsevier, 1998.
- [3] S. de Witand G. Augenbroe « Uncertainty analysis of building design evaluations », *Seventh International IBPSA Conference Rio de Janeiro, Brazil* : p.319-326, 2001.
- [4] Ramon Moore, « *Interval Analysis* », Prentice-Hall, 1966.
- [5] Gaétan Videau, « Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu », Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2009.
- [6] Arnold Neumaier, « *Interval methods for systems of equations* » Cambridge University press, 1990
- [7] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit and Eric Walter, « *Applied interval analysis* », Springer, p.11-44.
- [8] Gilles Lefebvre, « *Comportement thermique dynamique des bâtiments: simulation et analyse* », 1994.
- [9] J. Grotendorst, D. Marx, A. Muramatsu, « Monte Carlo Methods: Overview and Basics », *Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems: From Theory to Algorithms*, vol. 10: p. 1-24, 2002.
- [10] N. Meslem and N. Ramdani and Y. Candau « Guaranteed Parameter Set Estimation With Monotone Dynamical Systems Using Hybrid Automata », *Reliable Computing*, vol. 14: p. 88-104, 2010.