Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: https://sam.ensam.eu
Handle ID: .http://hdl.handle.net/10985/6602

To cite this version :

Aworou Waste AREGBA, Christophe PRADERE, Lucas BENASSIS, Lorenzo PONS, Jean-Christophe BATSALE - Quadripôles thermiques pour la modélisation du transfert diffusif dans une plaque délaminée. - 2010

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository Administrator : scienceouverte@ensam.eu

Arts et Métiers Institute of Technology

Quadripôles thermiques pour la modélisation du transfert diffusif dans une plaque délaminée.

Aworou Waste Aregba[1], Jean-Christophe Batsale[1], Christophe Pradère[1], Lucas Benassis[2,] Lorenzo Pons[2]
TREFLE-Arts et Métiers Paris Tech, UMR 8508 CNRS, Esplanade des Arts et Métiers 33405 Talence, France
2 TURBOMECA Groupe SAFRAN 64511 Bordes

Résumé
La méthode des quadripôles thermiques est souvent utilisée pour la modélisation directe du transfert diffusif dans des matériaux composites délaminés ou de plaques soumises à des coefficients d'échange non-uniformes, pour le contrôle non-destructif thermique par thermographie infrarouge. La mise en œuvre de cas bi ou tridimensionnels transitoires reste lourde du fait de la nécessité de l'inversion de matrices de grande taille dans l'espace de Fourier. Nous proposons de discuter de méthodes analytiques approchées implémentables à partir des expressions formelles, dans un cas simple 2D stationnaire.

Abstract
The thermal quadrupole method is used for the modelling of the heat diffusion in delaminated composite samples or non-uniform convective heating in the context of thermal Non Destructive Evaluation. 2D or 3D transient cases remain difficult from the necessity of the inversion of large linear systems in Fourier space. It is here proposed to discuss about approached analytical solutions seeked from the formal method, in a simple 2D stationnary case.

1. Introduction.

La méthode des quadripôles thermiques permet la mise en œuvre de solutions analytiques couramment utilisées dans le domaine du Contrôle Non-Destructif Thermique ([3], [4]) pour la mise au point de méthodes d'estimation de paramètres. Les modélisations de transferts multidimensionnels transitoires sont notamment très pratiques de mise en œuvre dans le cas de milieux multicouches uniformes en géométrie plane cylindrique ou sphérique. On évite ainsi les problèmes de maillage de domaine et les coûts de calcul souvent lourds inhérents aux méthodes numériques. Le fait de disposer d'expressions analytiques permet une analyse physique à l'aide de développements asymptotiques et permet de décliner les groupements de paramètres importants pour la mise en œuvre de méthodes d'estimation ou de méthodes inverses [3]. Enfin, par le fait que l'on met en œuvre des transformations intégrales en temps ou en espace, il est possible de manipuler directement les champs de températures dans les espaces transformés de Laplace ou de Fourier. Ces transformations intégrales sont alors à la fois un outil de résolution numérique et un outil de traitement des signaux [5]. L'avènement de techniques de contrôle non-destructif par thermographie infrarouge a encore accentué l'attrait de ces méthodes par le fait que l'on doit manipuler de grandes quantités de données et que les transformations intégrales constituent un outil de compression préalable des signaux.

L'extension de ces méthodes à des géométries plus complexes est envisageable, mais peu pratique. C'est le cas de l'étude du transfert 3D transitoire dans un plaque parallélépipédique contenant un délaminage non-uniforme spatialement ou soumise à un échange convectif localisé. L'application du formalisme des transformations intégrales mène à un problème d'inversion de matrice ou de grand système souvent lourd. Nous proposons de discuter de méthodes analytiques approchées implémentables grâce aux expressions formelles, dans un cas simple 2D stationnaire.

Nous étudions ici la conduction de chaleur dans une plaque rectangulaire comportant un défaut. La face supérieure de la plaque est soumise à un flux de chaleur uniforme et stationnaire, tandis que sa face inférieure est maintenue à une température nulle.

2. Présentation du problème

Nous modélisons la conduction de chaleur dans une plaque plane de longueur L, d'épaisseur e et comportant une résistance d'interface $R(x)$ située à une profondeur e_1 de la face avant $(z=0)$ qui est soumise à un flux de chaleur uniforme sur la plaque supérieure. La température de la face arrière $(z=e)$ est maintenue constante par exemple en la posant sur un milieu très effusif. Les faces latérales sont supposées adiabatiques. Cette situation à des traductions : l'observation de $T(x,0)$ correspond à une des méthodes de C.N.D. de délaminage par thermographie infrarouge et chauffage convectif en face avant ou par lampe.

2.1 Formulation du problème thermique

Le champ de température $T(x,z)$ de la plaque dépend des variables d'espace : $(x,z)\in\Omega=\left]0,L\right[\times\left]0,e\right[$ et est régi par le système suivant.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T(0,z)}{\partial x}=0,\ \ 0\le z\le e \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T(L,z)}{\partial x}=0,\ \ 0\le z\le e \qquad (3)$$

$$\lambda\cdot\frac{\partial T(x,0)}{\partial z}=Q,\ \ 0\le x\le L \qquad (4)$$

$$-\lambda\cdot\frac{\partial T^{\sup}(x,e_1)}{\partial z}=-\lambda\cdot\frac{\partial T^{\inf}(x,e_1)}{\partial z}\ \ 0\le x\le L \qquad (5)$$

$$T^{\sup}(x,e_1)-T^{\inf}(x,e_1)=R(x).\left[-\lambda\cdot\frac{\partial T^{\sup}(x,e_1)}{\partial z}\right]\ \ 0\le x\le L \qquad (6)$$

$$T(x,e)=0\quad 0\le x\le L \qquad (7)$$

Dans ces relations : $R(x)=\begin{cases}R_0 & si\ 0\le x\le b<L\\ 0 & si\ non\end{cases}$ et Q= constante indépendante de x

2.2 Résolution par la méthode des quadripôles et solutions approchées:

Soit $N \geq 0.$ on utilise une transformation de Fourier en cosinus selon la variable *x* et on recherche le champ de température sous la forme suivante : $T(x,z) = \tilde{T}(0,z)/L + (2/L)\sum_{n=0}^{N} \tilde{T}(\alpha_n, z) \cdot \varphi_n(x)$ *avec* $\varphi_n(x) = \cos(\alpha_n \cdot x)$ *et* $\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{L}$.

On adopte le formalisme de quadripôles thermiques [4]. Les variables d'entrée et de sortie en terme de température et de flux du système thermique sont reliées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_e \\ \tilde{\psi}_e = \tilde{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{R} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_s \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Dans cette relation, les termes A_i, B_i, C_i, D_i *et* $\tilde{R}$ sont des matrices de dimension (*N+1)*x(*N+1)* telles que :

$A_i. = D_i = diag[..., \cosh(\alpha_n e_i), ...]$, $B_i = diag[..., \sinh(\alpha_n e_i)/\lambda\alpha_n, ...]$, $C_i = diag[..., \lambda\alpha_n \sinh(\alpha_n e_i), ...]$;

Avec $i = 1,2$ *et* $n = 0, \ldots, N$;

$\tilde{R} = \left[\tilde{R}_{mn}\right]_{m=0,\ldots N; n=0,\ldots N}$ *avec* $\tilde{R}_{mn} = \int_0^L R(x).\varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x) dx$;

I est matrice identité d'ordre $(N+1)\times(N+1)$

$\tilde{T}_e, \tilde{\psi}_e, \tilde{\psi}_s$ *sont les vecteurs température et flux d'entrée et de sortie dans l'espace de Fourier de rang* : $N+1$

Notons : $A = A_1A_2 + B_1C_2$; $B = A_1B_2 + B_1D_2$; $C = C_1A_2 + B_1C_2$; $D = C_1B_2 + D_1D_2$ les expressions des matrices quadripolaires correspondant au milieu sain (sans délaminage). On déduit des relations précédentes les expressions formelles du champ de température en face avant et des flux intermédiaires.

Le flux de sortie, en face arrière (*z=e*) est exprimé par :

$$\tilde{\psi}_s = \left(D + C_1\tilde{R}D_2\right)^{-1}\tilde{Q} \qquad (9)$$

La température en face avant (*z=0*) est obtenue à partir de l'expression précédente :

$$\tilde{T}_e = \left(B + A_1\tilde{R}D_2\right)\tilde{\psi}_s = \left(B + A_1\tilde{R}D_2\right)\left(D + C_1\tilde{R}D_2\right)^{-1}\tilde{Q} \qquad (10)$$

On peut constater que l'expression (10) est souvent la seule utilisée par l'expérimentateur (accès direct par thermographie infrarouge par exemple), mais l'expression (9) exprimant le flux en face arrière est la plus difficile à calculer car elle nécessite l'inversion d'une matrice, pleine dans l'espace de Fourier, qui peut être de grande taille si le problème devient 3D et transitoire, ou si on recherche une forte résolution spatiale. La matrice $\tilde{R}$ est pleine alors que les autres matrices quadripolaires ($B, D, C_i, D_i, etc...$) sont diagonales.

On peut aussi considérer l'expression (10) à partir d'un flux intermédiaire $\tilde{\psi}_i$ situé en $z = e_1$, qui est le flux dont la distribution contient des discontinuités selon *x* et donc la densité spectrale la plus étendue dans l'espace de Fourier.

$$\tilde{\psi}_i = \left(DD_2^{-1} + C_1\tilde{R}\right)^{-1}\tilde{Q} \qquad (11)$$

Soit :

$$\tilde{T}_e = \left(BD_2^{-1} + A_1\tilde{R}\right)\tilde{\psi}_i = \left(BD_2^{-1} + A_1\tilde{R}\right)\left(DD_2^{-1} + C_1\tilde{R}\right)^{-1}\tilde{Q} \qquad (12)$$

A ce stade, on peut envisager une mise en œuvre « numérique » des expressions (9) à (12) (par inversion numérique des matrices ou par des résolution numériques de systèmes linéaires), d'autant que le formalisme est bien adapté à l'utilisation de solveurs matriciels tels que Matlab.

La recherche de solutions approchées basées sur des développements asymptotiques a déjà fait l'objet de travaux relatifs à la considération d'un petit terme qui peut être la résistance thermique causée par le délaminage ([1] [5]). Ceci revient ici à considérer que les matrices $C_1\tilde{R}D_2$ ou $C_1\tilde{R}$ sont petites devant les matrices D ou DD_2^{-1}. On obtient alors, des solutions par approximations successives telles que :

$$\left(D + C_1\tilde{R}D_2\right)^{-1} = (I + D^{-1}\,C_1\tilde{R}D_2)^{-1}D^{-1} \approx (\,I - \varepsilon + \,\varepsilon^2 - \varepsilon^3 ...)D^{-1} \qquad (13)$$

ou

$$\left(DD_2^{-1} + C_1\tilde{R}\right)^{-1} = (I + D^{-1}\,D_2C_1\tilde{R})^{-1}D^{-1}D_2 \approx (\,I - \eta + \,\eta^2 - \eta^3 ...)D^{-1}D_2 \qquad (14)$$

Avec : $\varepsilon = D^{-1}\,C_1\tilde{R}D_2$ et $\eta = D^{-1}\,D_2C_1\tilde{R}$

On évite alors une inversion lourde car les seules matrices à inverser sont diagonales et surtout les expressions sont formelles [1] permettant une compréhension physique des problèmes d'estimation de paramètres. Hélas, ce type de développement converge mal pour des variations de résistances thermiques de forte amplitude. Nous proposons alors des développements basés sur la considération d'une faible épaisseur de plaque ou un faible rapport *e/L*. Les approximations asymptotiques des matrices diagonales explicitées précédemment sont alors telles que :

$$A_i = D_i \approx diag\ [1,...,1 + \alpha_n{}^2 e_i{}^2 / 2,...] \quad ; B_i = diag[e_i/\lambda,...,(1+\alpha_n{}^2 e_i{}^2/6)e_i/\lambda,...] \ ;$$
$$C_i = diag[0,...,\alpha_n{}^2 e_i\lambda,...] \qquad (15)$$

Il est intéressant de constater que, au premier ordre : $A_i = D_i \approx I$; $B_i \approx (e_i/\lambda)I$ et $C_i \approx 0$, Le transfert est alors unidirectionnel dans le sens *z*. L'approximation des flux dans l'espace réel est alors telle que $\psi_i(x) \approx \psi_s(x) \approx Q$ et la température en face avant :

$$T_e(x) \approx \begin{cases} Q\,(R_0 + e/\lambda) & si\ 0 \le x \le b \\ Q\,(e/\lambda) & si\ b \le x \le L \end{cases} \qquad (16)$$

La poursuite du développement amène à considérer le flux d'interface et l'inversion de l'expression (11). En tenant compte du fait que l'inverse de l'opérateur $diag[0,...,-\alpha_n{}^2,...]$ est $\partial^2/\partial x^2$, on peut constater que l'approximation de $\left(DD_2^{-1} + C_1\tilde{R}\right)\tilde{\psi}_i = \tilde{Q}$ donne dans l'espace réel :

$$\psi_i(x) - \frac{e^2 - e_2{}^2}{2}\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} - e_1\lambda\frac{d^2\left(R(x)\psi_i(x)\right)}{dx^2} = Q \qquad (17)$$

en posant : $\beta_1 = \sqrt{\frac{e^2 - e_2{}^2}{2} + e_1\lambda R_0}$ *et* $\beta_2 = \sqrt{\frac{e^2 - e_2{}^2}{2}}$

On obtient le système différentiel du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \psi_i(x) - \dfrac{\partial^2\left(\beta_1^2\psi_i(x)\right)}{\partial x^2} = Q \quad si\ 0 \le x < b \\ \psi_i(x) - \dfrac{\partial^2\left(\beta_2^2\psi_i(x)\right)}{\partial x^2} = Q \quad si\ b < x \le L \end{cases} \tag{18}$$

Une solution approchée de ce système quand les limites en x=0 et x=L sont considérées comme éloignées de x=b est:

$$\psi_i(x) \approx \begin{cases} Q + (E_1 - Q)\exp\left(\dfrac{x-b}{\beta_1}\right) & si\ 0 \le x < b \\ Q + (E_2 - Q)\exp\left(\dfrac{b-x}{\beta_2}\right) & si\ b < x \le L \end{cases} \tag{19}$$

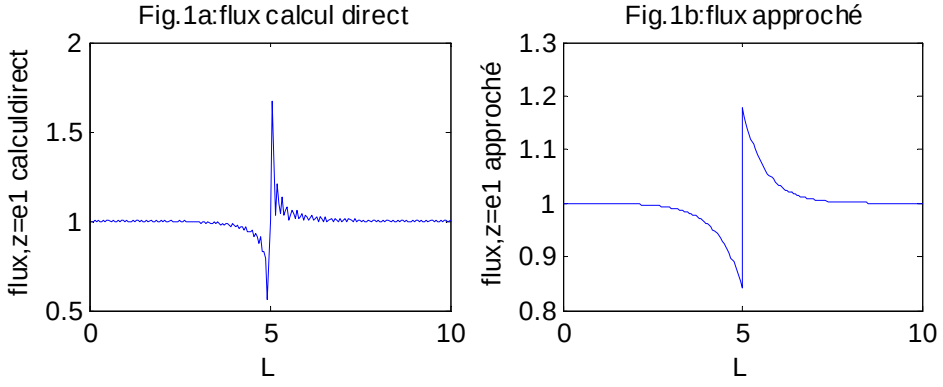
L'expression de la température en face avant est alors déduite de l'équation (12) :

$$T(x) \approx \begin{cases} \left(\dfrac{e_2}{\lambda} + R_0\right)\left(Q + (E_1 - Q)\exp\left(\dfrac{x-b}{\beta_1}\right)\right) + \dfrac{Q\,e_1}{\lambda} & si\ 0 \le x < b \\ \dfrac{e_2}{\lambda}\left(Q + (E_2 - Q)\exp\left(\dfrac{b-x}{\beta_2}\right)\right) + \dfrac{Q\,e_1}{\lambda} & si\ b < x \le L \end{cases} \tag{20}$$

Les constantes E_1 et E_2 sont déterminées en écrivant d'une part la conservation globale du flux: $\frac{1}{L}\int_0^L \psi_i(x)\,dx = Q$ soit $-\beta_1(E_1 - Q)\left(1 - \exp(-\frac{b}{\beta_1})\right) = \beta_2(E_2 - Q)\left(1 - \exp(\frac{b-L}{\beta_2})\right)$ et d'autre part la continuité de la température en $x = b$ soit : $E_1 = \dfrac{e_2}{e_2 + \lambda R_0} E_2$

3. Etude de quelques cas test

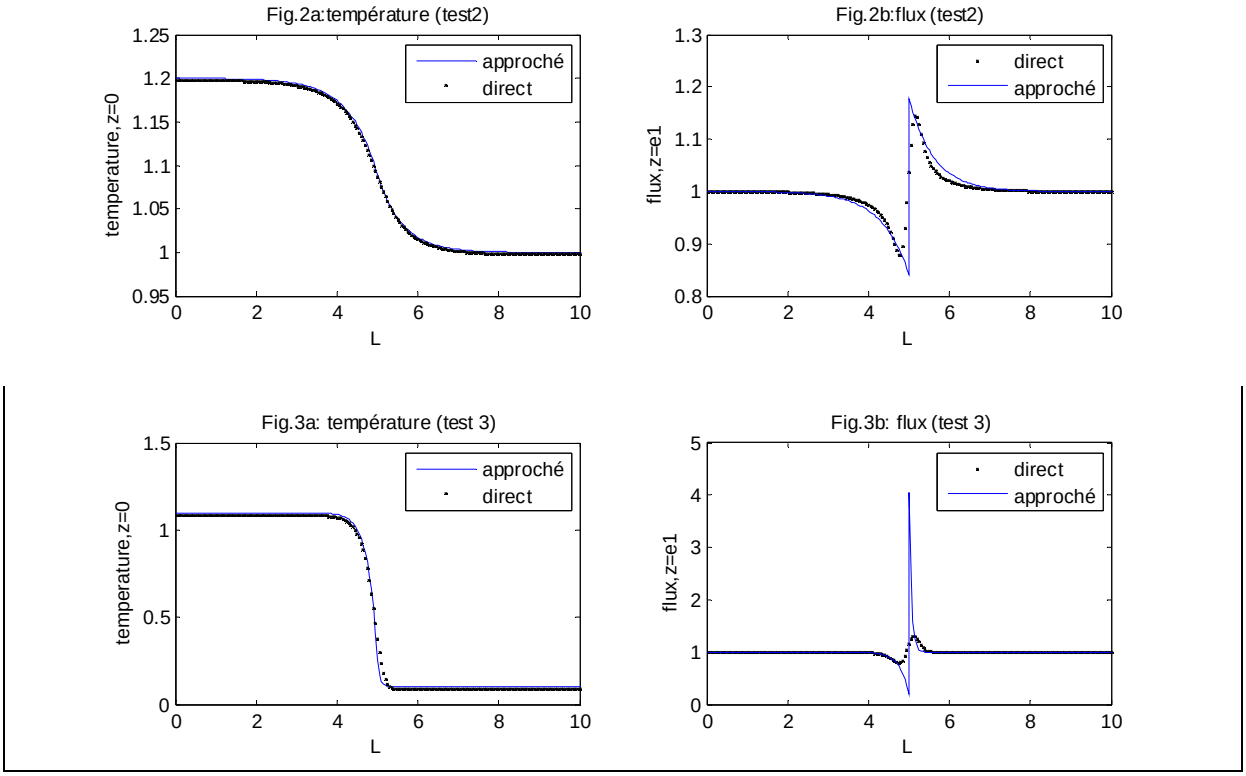
Cas test1 : L=10, e=1 e_1=0.5e, b=0.5L, R_0=0.2 , λ=1, $(W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1})$ Q=1 $(W\cdot m^{-2})$.Les figures (fig.1a et fig1.b) représentent les flux à l'interface $e_1$obtenus par le calcul direct et par la solution approchée. Le flux par calcul direct comporte des repliements de spectre d'où la nécessité de le filtrer.



test2 L=10, e=1 e_1=0.5e, b=0.5L, R_0=0.2 , λ=1, $(W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1})$ Q=1 $(W\cdot m^{-2})$.

test3 : L=10, e=0.1 e_1=0.5e, b=0.5L, R_0=1 , λ=1, $(W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1})$ Q=1 $(W\cdot m^{-2})$

Ces deux tests comparent les températures sur la face avant et le flux à l'interface pour deux profondeurs et deux contrastes de défaut différent.



4. Conclusion.

Même si le cas présenté ici est académique, les approches sont extensibles à des situations 3D transitoires grâce à des transformations intégrales supplémentaires en temps et en espace.

La plupart des méthodes de contrôle non-destructif thermique considèrent un transfert de chaleur unidirectionnel dans le sens *z*. Les distorsions du signal dues à des effets de diffusion 3D posent des problèmes liés à la résolution spatiale des méthodes de détection. Les expressions analytiques évoquées dans ce travail permettent d'appréhender ces problèmes et de mettre en évidence les paramètres pertinents.

Bibliographie

[1] A. Bendada A. A 2002 Approximate solutions to three-dimensional unsteady heat conduction through plane flaws within anisotropic media using a perturbation method. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. **10** 673-684.

[2] O. Fudym, B. Ladevie & J.C. Batsale A 2002. A Seminumerical Approach for Heat Diffusion in Heterogeneous Media:One extension of the Analytical Quadrupole Method. Numerical Heat Transfer, Part B, **42** 325-348.

[3] D. Maillet, J.C. Batsale, A. Bendada & A. Degiovanni A1996. Méthodes Intégrales et Contrôle Non Destructif par Thermographie Infrarouge Stimulée. Rev Gén Therm **35**, 14-27.

[4] D.Maillet, S. André, J.C.Batsale, A.Degiovanni , C. Moyne: Thermal quadrupoles-Solving the heat equation through integral transforms- J. Wiley Editeur- Chichester- 2000,

[5] I. Philippi, J.C. Batsale, D. Maillet, & A. Degiovanni A1995. Measurement of Thermal Diffusivities Through Processing of Infrared images. Rev.Sci.instrum. **66** (1) pp182-192