



### Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/6612>

#### To cite this version :

Asma MAACHOU, Rachid MALTI, Pierre MELCHIOR, Jean-Luc BATTAGLIA, Alain OUSTALOUP, Bruno HAY - Application des séries de Volterra non entière à l'identification de systèmes thermiques en conditions extrêmes - 2012

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# Application des séries de Volterra non entière à l'identification de systèmes thermiques en conditions extrêmes.

Asma MAACHOU<sup>1\*</sup>, Rachid MALTI<sup>1</sup>, Pierre MELCHIOR<sup>1</sup>, Jean-luc BATTAGLIA<sup>2</sup>, Alain OUSTALOUP<sup>1</sup>, Bruno HAY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Université Bordeaux 1, Institut Polytechnique de Bordeaux, IMS  
UMR 5218 CNRS, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex,

<sup>2</sup>Université Bordeaux 1, ENSAM, TREFLE  
UMR 8508 CNRS, Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex

<sup>3</sup>LNE, Laboratoire National de métrologie et d'Essais,  
29 avenue Roger Hennequin, 78197 Trappes Cedex

\*(auteur correspondant : asma.maachou@u-bordeaux1.fr)

**Résumé** - Les modèles linéaires non entiers ont prouvé leur efficacité dans la modélisation de phénomènes de diffusion thermique pour de faibles variations de température. Cependant, pour de larges variations de température, comme c'est le cas dans une torche à plasma ou en usinage en conditions sévères, les paramètres thermiques (capacité et conductivité thermiques) dépendent de la température. Par conséquent, la diffusion thermique n'est plus régie par un modèle linéaire non entier mais plutôt par un modèle non linéaire non entier. Dans ce papier, une nouvelle classe de modèles non linéaires non entiers, basée sur les séries de Volterra, est proposée pour modéliser les phénomènes diffusifs non linéaires. Les fonctions génératrices de bases orthogonales non entières sont utilisées comme noyaux afin d'étendre les séries de Volterra au cas non entier. Les paramètres non linéaires, tels que les  $s^n$  pôles des fonctions génératrices et l'ordre commensurable, sont estimés au même titre que les coefficients linéaires. Ensuite, les séries de Volterra sont utilisées pour modéliser le comportement thermique d'un échantillon de fer ARMCO à de larges variations de température à partir de données simulées par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel COMSOL d'une part, et à partir de données acquises sur un banc expérimental d'autre part. Il est montré d'une part qu'un modèle non linéaire non entier est plus précis qu'un modèle linéaire non entier et, d'autre part, qu'un modèle identifié est plus performant qu'un modèle par éléments finis car il permet, en une seule expérience, de prendre en compte l'ensemble des incertitudes du système.

## Nomenclature

$C_p$  capacité thermique  
 $T$  température,  $K$   
 $\mathcal{L}$  transformée de Laplace

### *Symboles grecs*

$\alpha$  diffusivité thermique,  $m^2.s^{-1}$   
 $\lambda$  conductivité thermique,  $m^2.s^{-1}$   
 $\rho$  masse volumique,  $m^2.s^{-1}$

## 1. Introduction

Le travail présenté dans ce papier entre dans le cadre du projet CONTROLTHERM financé par l'Agence Nationale de la Recherche. Ce projet vise à développer de nouveaux outils de coupe permettant d'estimer correctement le flux thermique généré lors de conditions d'usinage sévères de matériaux à haute valeur ajoutée, l'évolution du flux permettant de prévenir une éventuelle défaillance de l'outil. Cette estimation est basée sur la mesure de la température à proximité de la surface chauffée et sur l'inversion du modèle reliant la densité de flux injectée à la température mesurée. Ce papier concerne uniquement l'établissement d'un modèle non linéaire fiable pour de larges variations de température, la nonlinéarité résultant de la dépendance des propriétés thermiques des systèmes étudiés à la température. En effet, une petite erreur sur le modèle entraînerait un biais important sur le flux estimé. Par conséquent, la qualité de l'inversion d'un modèle est conditionné par la précision du modèle identifié.

La simulation d'un modèle par éléments finis requiert la connaissance des propriétés thermiques en fonction de la température du système étudié. Plusieurs expériences sont alors nécessaires pour caractériser ces propriétés. Malgré cette connaissance, un modèle par

éléments finis reste moins précis qu'un modèle identifié puisqu'il ne prend pas en compte les imprécisions dues à l'assemblage du système.

Pour des expériences aux temps courts, un système thermique peut être considéré comme un milieu semi-infini. Alors le modèle non entier apparaît naturellement comme une solution exact pour exprimer la température en fonction du flux en un point du système [1][2]. La modélisation linéaire d'un transfert de chaleur en milieu semi-infini est présentée en section 2. Ensuite, les limites d'une telle modélisation sont mises en avant pour de larges variations de température, justifiant l'utilisation de modèles non linéaires. La section 3 introduit le contexte mathématique autour du calcul fractionnaire et des séries de Volterra afin de présenter, à la section 4, une nouvelle classe de modèles non linéaires non entiers basée sur les séries de Volterra. L'estimation paramétrique est détaillée en section 5 puis appliquée sur des données acquises d'une part, en simulation par éléments finis et, d'autre part, sur un banc expérimental situé au laboratoire TREFLE à Bordeaux.

## 2. Intérêt des modèles non entier pour les systèmes thermiques: des petites aux larges variations de température.

A partir des équations caractérisant le transfert de chaleur dans un milieu semi-infini soumis à une densité de flux de chaleur  $\varphi(t)$  sur sa surface  $S$  (figure 1), les auteurs de [2] montrent que la modélisation par un système non entier est pertinente.

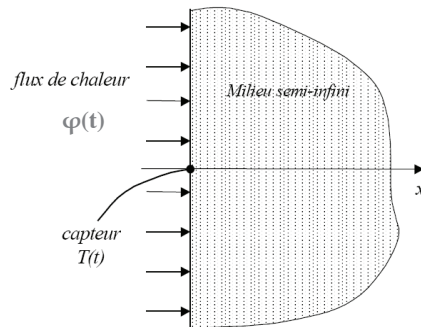


Fig. 1. Flux de chaleur appliqué à la surface d'un milieu semi infini

En effet, le phénomène de diffusion de la chaleur est régi par l'équation :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \text{ pour } 0 < x < \infty, t > 0 . \quad (1)$$

En considérant un état initial nul et isotherme,  $T(x,t) = 0$ , pour  $0 \leq x < \infty, t = 0$ , et les conditions aux limites:

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t), \text{ pour } x = 0, t > 0 \\ T(x,t) = 0 \text{ pour } x \rightarrow \infty, t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Sachant que  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ , l'expression de la température dans le domaine opérationnel devient :

$$\Theta(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho c_p}} e^{-x\sqrt{s/\alpha}} \Psi(s), \quad (3)$$

avec  $\Theta = \mathcal{L}(T)$  et  $\Psi = \mathcal{L}(\varphi)$ , démontrant que la température  $\Theta$  est lié au flux  $\Psi$  au travers d'une fonction de transfert impliquant une intégration d'ordre 0.5 et d'une exponentielle ayant un ordre de dérivation de 0.5. L'évaluation à l'ordre P de l'approximation de Padé du terme exponentielle conduit à la fonction de transfert suivante:

$$\frac{\Theta(x,s)}{\Psi(s)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho c_p}} \frac{\sum_{n=0}^P a_n s^{n/2}}{\sum_{n=0}^P |a_n| s^{(n+1)/2}}, \text{ avec } a_n = \left(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^n \frac{(2P-n)!}{n!(P-n)!}, \quad (4)$$

où les exposants de  $s$  sont multiples de l'ordre commensurable 0.5. Cette fonction de transfert est linéaire tant que les propriétés thermiques restent constantes, *i.e* pour de faibles variations de température autour de l'état initial. Le Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE) a caractérisé les propriétés thermophysiques de l'échantillon de fer ARMCO utilisé par la suite sur le banc expérimental. Comme le montre la Fig. 2, les propriétés thermiques varient en fonction de la température. De plus, les variations de ces propriétés sont plus prononcées autour de la température de Curie à 1040K. Donc, pour de larges variations de température, l'hypothèse de linéarité n'est donc plus valide et un modèle non linéaire est requis.

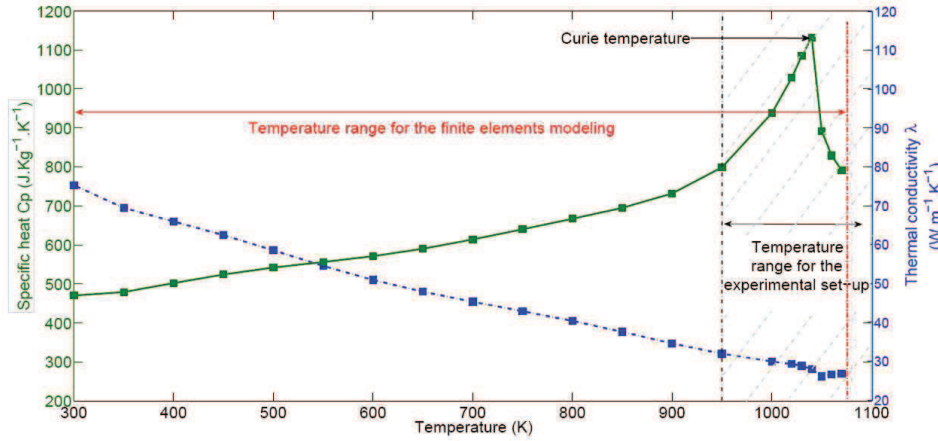


Fig. 2. Propriétés thermiques du fer ARMCO pour différentes températures, chaque carré représentant un point de mesure.

### 3. Contexte mathématique : modèle non entier et séries de Volterra

#### 3.1 Modèle non entiers

Un modèle mathématique non entier est généralement basé sur une équation différentielle non entière:

$$y(t) + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + \dots + a_N D^{\alpha_N} y(t) = b_0 D^{\beta_0} u(t) + b_1 D^{\beta_1} u(t) + \dots + b_M D^{\beta_M} u(t) \quad (5)$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $D$  désigne l'opérateur de dérivation  $D = \frac{d}{dt}$  et les ordres  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ ,  $0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_M$  désignent des nombres réels positifs, entiers ou non entiers ordonnés. La dérivée d'ordre non entier  $D^\gamma$  au sens de Grünwald peut être obtenue par la généralisation aux réels de la définition de la dérivation entière [3,4,5]:

$$D^\gamma = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(t - kh) \quad (6)$$

avec  $\gamma$  ordre de dérivation quelconque (entier ou non, réel ou complexe). Lorsque la fonction  $f$  est identiquement nulle pour tout  $t \leq 0$ , la transformée de Laplace de  $D^\gamma f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\{D^\gamma f(t)\} = s^\gamma F(s) \quad (7)$$

A partir de cette équation différentielle, la fonction de transfert  $F(s)$  dans le domaine de Laplace est définie telle que :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j s^{\alpha_j}} \quad (8)$$

Quand tous les ordres de dérivation sont multiples d'un même ordre,  $\nu$ , le système est dit commensurable. Dans ce cas la fonction de transfert devient :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M \tilde{b}_i s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j s^{j\nu}} \quad (9)$$

$$\text{avec } n = \frac{\beta_B}{\nu}, m = \frac{\alpha_A}{\nu} \text{ entiers et } \forall i' \in \{0,1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_{i'} = b_i \text{ si } \exists i \in \{0,1, \dots, M\} \text{ tel que } i' \gamma = \beta_i, \tilde{b}_{i'} = 0 \text{ sinon} \\ \tilde{a}_{j'} = a_j \text{ si } \exists j \in \{1, \dots, N\} \text{ tel que } j' \gamma = \alpha_j, \tilde{a}_{j'} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En identification, la contrainte de commensurabilité est souvent imposée pour limiter le nombre de paramètres à estimer. Dans ce cas, seul un ordre de dérivation est estimé au lieu de  $m_A + m_B + 1$  ordres. Cette commensurabilité est parfois naturelle, notamment en diffusion thermique dans un milieu semi-infini où l'ordre commensurable vaut 1/2.

### 3.2 Série de Volterra

Les séries de Volterra sont pertinentes pour modéliser les systèmes à temps continu invariant dans le temps à mémoire évanouissante [6]. Elles s'expriment aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Soit un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h_1(t)$  et une entrée  $u(t)$ , alors la sortie  $y(t)$  s'exprime par le produit de convolution :

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (10)$$

Pour un système non linéaire, un modèle basé sur les séries de Volterra s'écrit comme la somme infinie :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (11)$$

où  $y_k$  est la généralisation du produit (44) à l'ordre  $k$  :

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^k u(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (12)$$

où  $h_k$ , appelé noyaux de Volterra d'ordre  $k$ , a pour transformée de Laplace  $H_k(s_1, \dots, s_k)$  [7]. De plus, la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution (46) s'exprime par :

$$Y_k(s_1, \dots, s_k) = H_k(s_1, \dots, s_k) U_1(s_1) \dots U_k(s_k). \quad (13)$$

Par conséquent, la transformée de Laplace du signal de sortie  $y(t)$  (44) peut s'écrire :

$$Y(s_1, \dots, s_k, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(s_1, \dots, s_k) = Y_1(s_1) + Y_2(s_1, s_2) + Y_3(s_1, s_2, s_3) + \dots \quad (14)$$

Il apparaît que la sortie du premier noyau  $Y_1(s_1)$  correspond à la partie linéaire du système. Les autres noyaux contiennent la description du comportement non linéaire du système. Pour plus de simplicité, les noyaux sont supposés symétriques.

### 3. Séries de Volterra non entières

Dans la mesure où le comportement d'un système modélisé par des séries de Volterra dépend des noyaux de Volterra  $h_k$  dans l'équation (12), l'identification consiste d'abord à choisir ces noyaux  $h_k$ , puis à estimer les paramètres  $C$  et  $\theta$ . Le choix s'est porté sur des noyaux de Volterra s'écrivant sous la forme de fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Dans [8] les fonctions formant des bases orthonormales sont étendues aux dérivées non entières en utilisant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur un ensemble de fonctions génératrices non entière  $F_n$ . Par conséquent leurs transformées de Laplace inverses  $f_n(t)$  forment une base dans  $L_2 [0, \infty)$  [8,9]. En conséquence, le noyau d'ordre 1 des séries de Volterra  $h(t)$  peut toujours être approché en utilisant ces fonctions génératrices non entières de bases orthogonales :

$$h_1(t) \approx \sum_{n=1}^M b_n f_n(t) \quad (15)$$

où  $b_n$  est le coefficient associé à  $f_n$ , et  $M$  l'ordre de troncature. Lorsque les  $s^v$ -pôles du système sont réels et/ou complexes conjugués, les fonctions génératrices de la base orthogonale non

entière généralisée peuvent être utilisée [10]. Par exemple, un système linéaire caractérisé par 3  $s^v$ -pôles de la base orthogonale généralisée à  $-\chi_1 = -\bar{\chi}_2$  complexe conjugué et  $-\chi_3$  réel, peut s'écrire:

$$h_1(t) \approx \sum_{n=1}^3 b_n f_n(t) \tag{16}$$

avec les fonctions génératrices:

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{s^v + \mathcal{R}e(\chi_1)}{(s^v + \chi_1)(s^v + \chi_2)} \\ F_2(s) = \frac{\mathcal{I}m(\chi_2)}{(s^v + \chi_1)(s^v + \chi_2)} \\ F_3 = \frac{1}{(s^v + \chi_3)} F_2 \end{cases} \tag{17}$$

Parallèlement au développement de Bibes [11] pour des noyaux de Volterra exprimés à partir d'une base orthonormale entière, l'équation (12) peut être approchée par :

$$y_k(t) = \sum_{m_1=1}^M \dots \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} c_{m_1, \dots, m_k} \times x_{m_1}(t) \dots x_{m_k}(t), \tag{18}$$

avec  $x_{mi}(t) = \int_0^t f_{mi}(\tau_i)u(t - \tau_i)d\tau_i$ , M le nombre de fonctions génératrices non entière fmi utilisées pour approcher les noyaux. La sortie du noyau d'ordre k est présenté sur la Fig.1. Par conséquent Y (s), la transformée de Laplace de la sortie y(t), développée sur une base de trois fonctions génératrices et de deux noyaux de Volterra, s'écrit :

$$\begin{aligned} Y(s_1, s_2) &= Y_1(s) + Y_2(s_1, s_2) \text{ avec} \\ \begin{cases} Y_1(s_1) = c_{1,1}F_1(s_1)U(s_1) + c_{2,2}F_2(s_1)U(s_1) + c_{3,3}F_3(s_1)U(s_1) \\ Y_2(s_1, s_2) = c_{1,1,2}F_1(s_1)U(s_1)F_1(s_2)U(s_2) + c_{1,2,2}F_1(s_1)U(s_1)F_2(s_2)U(s_2) + \\ c_{1,3,2}F_1(s_1)U(s_1)F_3(s_2)U(s_2) + c_{2,2,2}F_2(s_1)U(s_1)F_2(s_2)U(s_2) + \\ c_{2,3,2}F_2(s_1)U(s_1)F_3(s_2)U(s_2) + c_{3,3,2}F_3(s_1)U(s_1)F_3(s_2)U(s_2) \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

### 5. Estimation paramétrique

Selon les connaissances a priori, une programmation linéaire ou non linéaire peut être mise en place pour estimer les paramètres inconnus. Lorsque l'ordre commensurable et les pôles sont choisis en fonction des connaissances a priori, seuls les coefficients  $c_{m_1 \dots m_k}$  sont estimés par des méthodes linéaires comme la méthode à *erreur de sortie* [12]. La méthode de programmation non linéaire (PNL) est utilisée lorsque l'ordre commensurable et les  $s^n$ -pôles sont à estimer en plus des coefficients.

Ainsi, la méthode PNL est combinée à la programmation linéaire comme le montre la Fig. 3. Les paramètres optimaux sont calculés en minimisant un critère basé sur l'erreur de sortie:

$$J_{id} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} (y^*_{id}(kh) - \hat{y}_{id}(kh))^2}{y^*_{id}(kh)^2} \times 100 \tag{20}$$

où  $y^*_{id}$  est la sortie bruitée du système et  $\hat{y}_{id}$  la sortie estimée. Pour des raisons de comparaison, le même critère est calculée à partir des données de validation ( $y^*_{val}$  et  $\hat{y}_{val}$ ).

La première étape consiste à initialiser  $\theta = [\chi_1, \chi_2, \chi_3, v]$ . Les trois  $s^v$ -pôles sont initialisés suite à une identification par modèle linéaire non entier, à l'aide de la méthode "erreur de sortie" (oe), [12], afin de capturer la dynamique du système, alors que l'ordre commensurable v est fixé à 0.5. Lors de la deuxième étape, le vecteur des coefficients linéaires  $C = [c_1, \dots, c_2, c_{11}, \dots, c_{33}]$  est estimé par la méthode des moindres carrés. Dans la troisième étape, le vecteur  $\theta$  est optimisé par programmation non linéaire. L'algorithme de Levenberg-Marquard implementé dans la fonction *lsqnonlin* de la toolbox *optimisation* de MATLAB est utilisé. La deuxième et la troisième étapes sont réitérées jusqu'à convergence ou jusqu'à ce que le nombre maximum d'itération soit atteint comme indiqué par la fig. 4 .

### 6. Résultats

Soit un échantillon cylindrique (Fig.5) (rayon R=10mm, épaisseur e=19.37 mm). Une face du cylindre est soumis a un flux variant dans le temps, uniformément distribué sur un disque de rayon r=1.25 mm. Afin d'amplifier la sensibilité au flux, le thermocouple de type K (diamètre

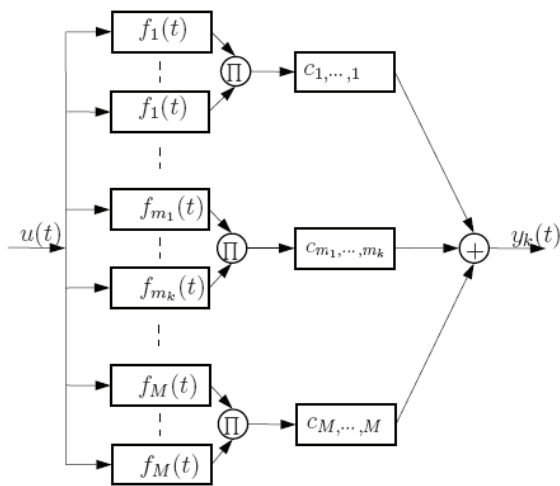


Fig. 3. Sortie du noyau d'ordre k développé sur M fonctions génératrices

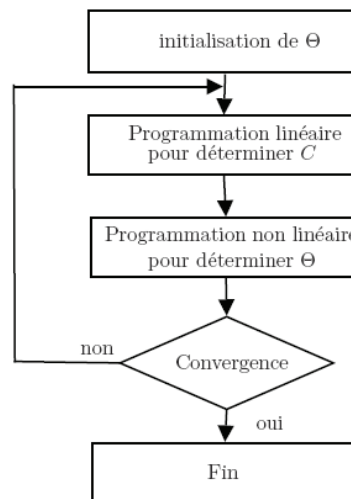


Fig. 4. Estimation paramétrique par PNL

0.5mm) est placé aussi près que possible de la surface S excitée (d=2mm). Le capteur reste pour sa part dans un domaine de fonctionnement linéaire, ce qui conduit à dire que les nonlinéarités sont dues aux variations des propriétés thermiques.

Le transfert de chaleur à l'intérieur de l'échantillon est modélisé par éléments finis avec des éléments quadratiques de Lagrange (par défaut) dans une configuration 3D. La période d'échantillonnage de  $h = 0.01$  seconde est atteignable par le système d'acquisition du banc d'essai et permet de fixer la fréquence haute du signal d'entrée.

Deux jeux de données sont générés : un jeu dédié à l'identification et l'autre à la validation, avec en entrée une densité de flux ( $W/m^2$ ) d'amplitude allant de 0 à  $1.10^8$  et en sortie la variation de température (K) sur 25 s.

Le système est également identifié par un modèle linéaire ce qui permet d'initialiser  $\theta$  pour le modèle non linéaire. Le Tableau 1 confirme qu'un nombre de fonctions génératrices  $M = 3$  est un bon choix car pour  $M = 3$  le critère de validation ne s'améliore pas de manière significative. Les trois  $s^v$ -pôles estimés et l'ordre commensurable  $v = 0.5$  permettent de fixer le vecteur de paramètres  $\theta$  initial pour le système non linéaire. Le vecteur  $\theta$  converge après optimisation à  $\theta=[0.38+2.47i, 0.38-2.47i, 0.76, 0.60]$ .

Les sorties du système et du modèle de Volterra calculées à partir des données de validation sont tracées sur la Fig.6. De plus, la sortie de chaque noyau est représentée de manière à mettre en évidence la contribution de la partie linéaire et celle de la partie non linéaire. La sortie du modèle linéaire est également tracée dans un but de comparaison. La sortie du modèle de Volterra se rapproche davantage de la sortie du système comparée à celle du modèle linéaire. Les critères  $J_{id}$  et  $J_{val}$  donnés dans le Tableau 2 diminuent de 0.55 à 0.07 et de 0.25 à 0.15 respectivement.

M	1	2	3	4
$J_{id}$	1.51	1.48	0.55	0.12
$J_{val}$	1.14	1.1	0.25	0.29

Tableau 1 : Critères  $J_{id}$  et  $J_{val}$  en fonction du nombre de fonctions génératrices utilisées pour l'estimation du modèle linéaire

Modèle	Linéaire	Volterra 2°ordre
$J_{id}$	0.55	0.07
$J_{val}$	0.25	0.15

Tableau 2 : Comparaison des critères  $J_{id}$  et  $J_{val}$  des modèles linéaire et non linéaire

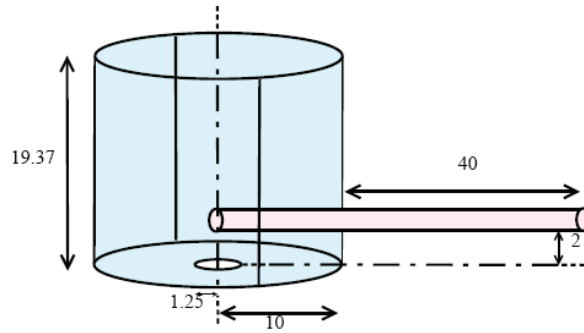


Fig. 5. Propriétés thermiques du fer ARMCO pour différentes températures, chaque carré représentant un point de mesure.

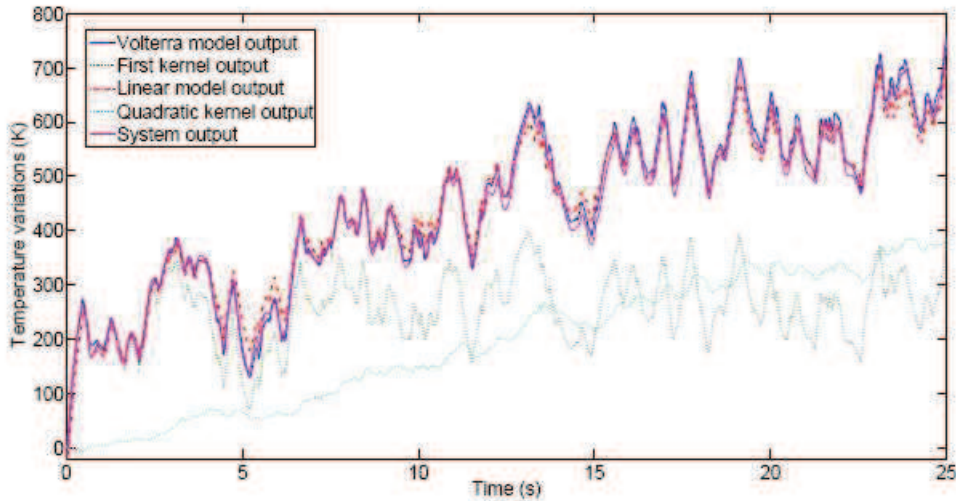


Fig. 6. Comparaison des sorties du modèle linéaire et non linéaire à la sortie du système

Dans un second temps, les données d’entrées et de sorties sont générées à partir d’un dispositif expérimental basé au laboratoire TREFLE à Bordeaux. L’expérience consiste à injecter un flux généré par un laser fibré, de longueur d’onde  $1 \mu\text{m}$  et piloté en interne par un générateur de fonction pouvant être modulé par une fréquence maximale de 10 kHz, à la surface d’un échantillon de fer ARMCO similaire au modèle par éléments finis. L’objectif est de fournir suffisamment d’énergie afin de provoquer de larges variations de température. Cependant, A cause de contraintes physiques (limitation de l’espace du banc d’essai, limitation de la puissance du laser), les variations de température sont limités à 150K. Étant donné que les caractéristiques thermiques varient de manière importante autour du point de Curie (1040K), l’échantillon est chauffé jusqu’à 940K.

Comme précédemment, un modèle linéaire est d’abord identifié, confirmant le choix de trois fonctions génératrices dont les  $s^0$ -poles sont utilisé pour initialisé lambda. Les paramètres linéaires et non linéaire du modèle de Volterra d’ordre 2 sont ensuite optimisés. La sortie du modèle de Volterra se rapproche davantage de la sortie du système comparée à celle du modèle linéaire puisque les critères d’identification et de validation diminuent de 0.30 à 0.08 et de 0.68 à 0.31 respectivement.

Les sorties du modèle de Volterra et du modèle par éléments finis sont comparés à la sortie du système expérimental. La sortie du modèle de Volterra est plus proche de celle du système que la sortie du modèle par éléments finis car la modélisation par éléments finis ne prend pas en compte:

- (i) l’incertitude sur la position du thermocouple du à l’imprécision de l’assemblage à l’intérieur de l’échantillon,
- (ii) l’incertitude de la géométrie de la surface de contact entre le capteur et l’échantillon,
- (iii) l’air et la colle rendant l’interface entre le capteur et l’échantillon non idéal,
- (iv) la dynamique non linéaire du capteur,



alors qu'une seule expérience permet au modèle identifié d'inclure ces incertitudes.

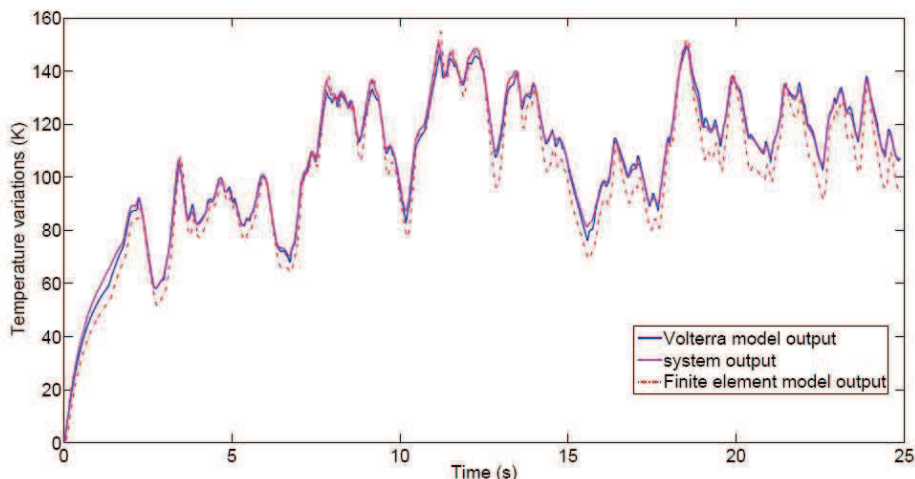


Fig. 7. Comparaison des sorties du modèle non linéaire, du modèle par éléments finis et du système

## 6. Conclusion

La diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO est identifié, dans ce papier, pour de larges variations de température en utilisant un modèle basé sur les séries de Volterra non entières dont les noyaux sont construits à partir de fonctions génératrices de bases orthonormales non entières. Les paramètres linéaires et non linéaires du modèle sont estimés par programmation non linéaire pour un modèle de Volterra tronqué au noyau quadratique, d'abord à partir de données de simulation, puis de données acquises sur un banc expérimental. Ce modèle permet de mieux identifier le comportement du système comparé à un modèle linéaire non entier. De plus, ce modèle non linéaire est obtenu à partir d'une seule expérience et permet d'obtenir une modélisation plus précise qu'un modèle par éléments finis nécessitant plusieurs expériences afin de caractériser les propriétés thermiques.

## 7. Référence

- [1] Oldham, K.B. and J. Spanier (1972). A general solution of the diffusive equation for semiinfinite geometries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 39, 655–669.
- [2] Battaglia, J.-L. (2008). *Heat transfer in materials forming processes*. Wiley Chippenham.
- [3] Grünwald, A.K. (1867). Ueber begrenzte derivationen und deren anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 12, 441–480.
- [4] Miller, K.S. and B. Ross (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience Publication.
- [5] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego.
- [6] Boyd, S. and L.O. Chua (1985). Fading memory and the problem of approximating nonlinear operator with volterra series. *IEEE Transactions on circuits and systems* 32(11), 1150–1161.
- [7] Crum, L.A. and J.A. Heinen (1974). Simultaneous reduction and expansion of multidimensional laplace transform kernels. *SIAM Journal on applied mathematics* 26(4), 753–771.
- [8] Aoun, M., R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup (2007). Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation. *Automatica* 43(9), 1640–1648.
- [9] Akçay, H. (2008). Synthesis of complete orthonormal fractional basis functions with prescribed poles. *IEEE Transactions on signal processing* 56(10), 4716 – 4728.
- [10] Malti, R., M. Aoun, F. Levron and A. Oustaloup (2005). *Fractional Differentiation and its Applications*. Vol. 1 – Mathematical tools, geometrical and physical aspects. Chap. Unified construction of fractional generalized orthogonal bases, pp. 87–102. U-Books. Germany.
- [11] Bibes, G. (2004). *Modélisation de procédés de traitements des eaux et reconstruction de grandeurs physico-chimiques*. PhD thesis. Université de Poitiers.
- [12] Malti R., Victor S., Nicolas O., Oustaloup A. system identification using fractional models : state of art. ASME, Las Vegas, Nevada, USA, 4-7 September 2007.