



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10113>

#### **To cite this version :**

Farid ABED-MERAIM, Ron PEERLINGS, Marc GEERS - Analyse de bifurcation et critères de force maximum dans la prédiction des limites de striction des tôles métalliques étirées - In: 12ème Colloque National en Calcul des Structures, France, 2015-05-18 - Actes du 12ème Colloque National en Calcul des Structures - 2015

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# Analyse de bifurcation et critères de force maximum dans la prédiction des limites de striction des tôles métalliques étirées

F. Abed-Meraim<sup>1</sup>, R.H.J. Peerlings<sup>2</sup>, M.G.D. Geers<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LEM3, Arts et Métiers ParisTech, farid.abed-meraim@ensam.eu

<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering, Eindhoven Univ. of Technology, {R.H.J.Peerlings,M.G.D.Geers}@tue.nl

**Résumé** — Cette contribution porte sur la prédiction de la striction diffuse dans le contexte des tôles métalliques sous changements biaxiaux. A cette fin, deux approches sont considérées, à savoir la théorie de bifurcation et le principe de force maximum, avec une analyse critique et une comparaison systématique de leurs prédictions respectives. L'expression bien connue du critère de striction diffuse de Swift, dont l'origine est attribuée au principe de force maximum, est montrée ici découler de l'approche de bifurcation, ce qui permet de lui donner une justification et des fondements plus solides.

**Mots clés** — bifurcation, principe de force maximum, striction diffuse, tôles métalliques étirées

## 1. Introduction étendue

Dans la littérature ayant trait aux instabilités plastiques en général, et en particulier dans le contexte de la mise en forme des tôles métalliques, un grand nombre de critères de limites de formage ont été développés. Cependant, une comparaison rigoureuse et approfondie de leurs fondements théoriques et hypothèses sous-jacentes n'est pas apparue. Une liste exhaustive de ces critères se révèle difficile à établir compte tenu de la multitude de variantes existant pour certaines approches. Une analyse bibliographique montre cependant que ces critères peuvent être classifiés en catégories distinctes, en fonction de leurs fondements théoriques ou physiques.

Pour des tôles métalliques étirées, deux formes de striction peuvent apparaître, à savoir la striction diffuse et localisée. La striction diffuse précède généralement la striction localisée, et il est maintenant bien établi que les déformations maximales admises en mise en forme sont délimitées par l'apparition de la striction localisée. Pour ces raisons, la plupart des courbes limites de formage (CLF) sont tracées à localisation. D'un point de vue expérimental, les CLF sont obtenues à striction localisée pour différents trajets de chargement (traction uniaxiale, traction plane, tractions biaxiales, ...) utilisant des essais de Marciniak ou Nakazima avec des échantillons de différentes largeurs. A noter que ce concept de CLF a été initialement introduit par Keeler [16] et Goodwin [10] afin de déterminer les déformations critiques pouvant conduire à des pièces défectueuses.

Les premiers critères d'instabilités plastiques étaient basés sur le principe de force maximum, comme initié par Considère [5] dans le cas unidimensionnel et étendu par Swift [24] au cas bidimensionnel pour des applications aux tôles métalliques. Ces critères, dans leur forme originale, étaient formulés pour prédire la striction diffuse. Plus tardivement, ces critères basés sur le principe de force maximum ont été étendus par Hora *et al.* [14] et ensuite par Mattiasson *et al.* [20] afin de prédire la striction localisée, et des versions enrichies ont été développées pour prendre en compte certains effets, tels que l'épaisseur, le changement de trajet de déformation, ... etc. A noter que le critère de striction localisée de Hill [12], basé sur l'apparition d'une bande d'extension nulle mais qui est néanmoins restreint à la partie gauche de la CLF, a été développé dans la même période que le critère de striction diffuse de Swift.

Une autre approche, postulant l'existence d'un défaut dans la tôle métallique, a été proposée par Marciniak et Kuczynski [19]. Dans sa version originale, le modèle de Marciniak-Kuczynski (M-K)

peut être vu dans un sens comme une approche complémentaire au critère de Hill [12], puisqu'il ne peut pas apparaître de bande d'extension nulle dans le domaine d'expansion biaxiale positive (i.e., partie droite de la CLF). Cependant, puisque la striction localisée est observée en pratique dans le domaine d'expansion biaxiale, une imperfection géométrique devait être introduite dans le modèle M–K pour reproduire ce phénomène, ce qui pourrait fournir une certaine justification à cette approche de type imperfection. Ce modèle a ensuite été étendu par Hutchinson et Neale [15], pour la prédiction de la partie gauche de la CLF, en autorisant l'imperfection sous forme de bande à tourner dans le plan de la tôle jusqu'à ce qu'une striction localisée soit détectée.

La théorie de perte de stabilité matérielle de Drucker [7] et Hill [13], connue aussi sous le nom de critère de bifurcation général, représente une autre classe d'approches de prédiction de striction. Dans cette même classe d'approches, un critère de bifurcation par point limite a été proposé plus tard [27], et il a été montré que pour une plasticité associée, les prédictions du critère de bifurcation par point limite coïncident avec celles du critère de bifurcation général. Pour la striction localisée, Stören et Rice [23] ont établi un critère de bifurcation basé sur la perte d'ellipticité (i.e., singularité du tenseur acoustique), qui est parfois aussi connu sous le nom de critère de bifurcation discontinue (voir Rudnicki et Rice [26], Rice [25]). De la même manière, certains auteurs ont suggéré l'utilisation du critère de perte d'ellipticité forte (voir Bigoni et Hueckel [4], Neilsen et Schreyer [22]), qui a été montré coïncider avec le critère de Rice pour des modèles de plasticité associée.

Une dernière classe importante de critères est celle basée sur la théorie de stabilité. Dans cette approche, les phénomènes de striction et de localisation sont traités par l'analyse de stabilité des équations d'équilibre locales. Le point de départ est celui du concept mathématique de stabilité qui a été introduit par Lyapunov [17] et communément appliqué aux problèmes de stabilité de structures (voir, par exemple, [1]). La technique de perturbation linéaire associée a été étendue aux problèmes d'instabilités matérielles par Molinari et Clifton [21]. Pour étudier le taux de croissance de la perturbation, les équations correspondantes sont linéarisées et le problème de valeurs propres résultant permettra de caractériser les modes stables ou instables. Pour des modèles de comportement dépendant du temps physique, cette approche peut être vue comme une alternative intéressante à la théorie de bifurcation; cette dernière étant connue ne pas s'appliquer pour des matériaux sensibles à la vitesse de déformation. Dans la limite d'une sensibilité nulle à la vitesse, il a été montré que cette méthodologie permettait de retrouver le critère de bifurcation de Rice (voir Barbier *et al.* [2], Benallal [3]).

De l'analyse précédente des différentes approches de prédiction de striction et de localisation, une observation intéressante peut être faite. En effet, alors que les analyses basées sur l'approche M–K ou sur le principe de force maximum ont été largement utilisées dans la littérature, peu d'applications de la théorie de bifurcation de Rice ont été faites pour la prédiction des limites de formage des tôles métalliques, lesquelles sont essentiellement restreintes à des hypothèses de contraintes planes et à de simples modèles de comportement (voir Doghri et Billardon [6]). Plus récemment, l'approche de localisation de Rice a été adoptée pour étudier les limites de ductilité de matériaux métalliques (voir Haddag *et al.* [11], Mansouri *et al.* [18], en utilisant une modélisation phénoménologique du comportement, ou Franz *et al.* [8], au moyen d'une approche micromécanique). Outre ses fondements théoriques solides et rigoureux, l'approche de bifurcation a aussi l'avantage de fournir un outil utile d'analyse de l'impact des mécanismes microstructuraux sur les limites de ductilité de matériaux polycristallins (voir Franz *et al.* [8, 9]).

Dans la présente étude, l'attention sera restreinte à la prédiction de la striction diffuse dans les tôles métalliques soumises à des chargements biaxiaux dans leur plan. Bien que l'investigation de la striction diffuse, en tant qu'approche pour les limites de formage, puisse être vue comme conservative lorsqu'elle est comparée aux prédictions de striction localisée, il y a néanmoins un intérêt dans une telle analyse. Au-delà de son intérêt académique évident, le développement d'expressions explicites pour les modules d'écrouissage critiques permettrait de sélectionner des trajets de chargement qui soient moins favorables à la striction, et peut ainsi être utilisé pour concevoir des essais spécifiquement dédiés à l'identification de paramètres matériaux utilisant des tests mécaniques

homogènes. A cette fin, deux approches sont étudiées en détails : le principe de force maximum et l'approche de bifurcation. Leurs capacités respectives à prédire ce type de phénomènes d'instabilités géométriques sont systématiquement comparées pour différents modèles de comportement.

Le contenu du papier est décrit comme suit. Tout d'abord, la position du problème est clairement exposée en donnant les principales équations gouvernant l'analyse de bifurcation et le principe de force maximum. Certaines restrictions concernant l'étendue de validité du principe de force maximum sont aussi mises en évidence et discutées. Ensuite, une étude préliminaire illustrative est menée dans le cadre de l'élasticité, où les prédictions des deux critères sont montrées différer significativement, ce qui confirme qu'ils sont basés sur des concepts bien distincts. Le cas de l'élasto-plasticité est alors considéré, et les états critiques de déformations et de contraintes sont déduits pour les deux critères sous forme d'expressions analytiques valables pour une variété de modèles d'écrouissage. L'analyse est ensuite étendue au cas rigide-plastique, où les formules résultantes sont montrées représenter avec précision les états critiques élasto-plastiques pour de faibles rapports du module d'écrouissage par rapport au module de Young. Enfin, les prédictions des deux approches sont analysées de manière critique et discutées en détails. Il apparaît, en particulier, que l'expression bien connue du critère de striction diffuse de Swift, qui est attribuée dans la littérature au principe de force maximum, est plutôt basée sur l'approche de bifurcation, ce qui lui donne des fondements plus solides et justifie son utilisation assez répandue dans le domaine de mise en forme des tôles minces.

## Références

- [1] Abed-Meraim, F. and Nguyen, Q. S. [2007] "A quasi-static stability analysis for Biot's equation and standard dissipative systems," *European Journal of Mechanics – A/Solids* **26**, 383–393.
- [2] Barbier, G., Benallal, A. and Cano, V. [1998] "Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIb - Mechanics-Physics-Astronomy* **326**, 153–158.
- [3] Benallal, A. [2008] "A note on ill-posedness for rate-dependent problems and its relation to the rate-independent case," *Computational Mechanics* **42**, 261–269.
- [4] Bigoni, D. and Hueckel, T. [1991] "Uniqueness and localization – associative and non-associative elastoplasticity," *International Journ. of Solids Structures* **28**, 197–213.
- [5] Considère, A. [1885] "Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions," *Annales des Ponts et Chaussées* **9**, 574–775.
- [6] Doghri, I. and Billardon, R. [1995] "Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials," *Mechanics of Materials* **19**, 129–149.
- [7] Drucker, D. C. [1956] "On uniqueness in the theory of plasticity," *Quarterly of Applied Mathematics* **14**, 35–42.
- [8] Franz, G., Abed-Meraim, F., Ben Zineb, T., Lemoine, X. and Berveiller, M. [2009] "Strain localization analysis using a multiscale model," *Computational Materials Science* **45**, 768–773.
- [9] Franz, G., Abed-Meraim, F. and Berveiller, M. [2013] "Strain localization analysis for single crystals and polycrystals: towards microstructure–ductility linkage," *International Journal of Plasticity* **48**, 1–33.
- [10] Goodwin, G. M. [1968] "Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop," *La Metallurgica Italiana* **8**, 767–774.
- [11] Haddag, B., Abed-Meraim, F. and Balan, T. [2009] "Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic–plastic model coupled with damage," *International Journal of Plasticity* **25**, 1970–1996.

- [12] Hill, R. [1952] "On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **1**, 19–30.
- [13] Hill, R. [1958] "A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **6**, 236–249.
- [14] Hora, P., Tong, L. and Reissner, J. [1996] "A prediction method of ductile sheet metal failure in FE simulation," *Proc. of Numisheet 1996*, Dearborn, Michigan, USA, pp. 252–256.
- [15] Hutchinson, J. W. and Neale, K. W. [1978] "Sheet Necking - II. Time-independent behavior," *Mechanics of Sheet Metal Forming*, Plenum Publishing Corporation, pp. 127–153.
- [16] Keeler, S. P. [1965] "Determination of forming limits in automotive stampings," *Sheet Metal Industries* **42**, 683–691.
- [17] Lyapunov, A. [1892] *The general problem of stability of motion*. Engl. Transl. (1992), (Taylor and Francis, London).
- [18] Mansouri, L. Z., Chalal, H. and Abed-Meraim, F. [2014] "Ductility limit prediction using a GTN damage model coupled with localization bifurcation analysis," *Mechanics of Materials* **76**, 64–92.
- [19] Marciniak, Z. and Kuczyński, K. [1967] "Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal," *International Journal of Mechanical Sciences* **9**, 613–620.
- [20] Mattiasson, K., Sigvant, M. and Larson, M. [2006] "Methods for forming limit prediction in ductile metal sheets," *Proc. of IDDRG 2006*, Porto, Portugal, pp. 1–9.
- [21] Molinari, A. and Clifton, R. [1987] "Analytical characterization of shear localization in thermo-visco-plastic solids," *Journal of Applied Mechanics* **54**, 806–812.
- [22] Neilsen, M. K. and Schreyer, H. L. [1993] "Bifurcations in elastic–plastic materials," *International Journal of Solids and Structures* **30**, 521–544.
- [23] Stören, S. and Rice, J. R. [1975] "Localized necking in thin sheets," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **23**, 421–441.
- [24] Swift, H. W. [1952] "Plastic instability under plane stress," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **1**, 1–18.
- [25] Rice, J. R. [1976] "The localization of plastic deformation," *Proc. of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland Publishing Co., Delft, Netherlands, pp. 207–220.
- [26] Rudnicki, J. W. and Rice, J. R. [1975] "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **23**, 371–394.
- [27] Valanis, K. C. [1989] "Banding and stability in plastic materials," *Acta Mechanica* **79**, 113–141.