



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/26444>

To cite this version :

Farid ABED-MERAIM, Alain COMBESCURE - Une nouvelle formulation libre de verrouillage pour l'élément de coque massif "SHB8PS" - In: 7ème Congrès de Mécanique, Maroc, 2005-04-18 - Actes du 7ème Congrès de Mécanique - 2005

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



UNE NOUVELLE FORMULATION LIBRE DE VERROUILLAGE POUR L'ELEMENT DE COQUE MASSIF "SHB8PS"

F. ABED-MERAIM*, A. COMBESCURÉ**

* LPMM UMR CNRS 7554, ENSAM CER de Metz, 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz – France

** LaMCoS UMR CNRS 5514, INSA-Lyon, 18-20 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne – France

INTRODUCTION

Plusieurs travaux ont été consacrés au développement d'éléments finis solides capables de modéliser des structures minces. Les avantages de tels éléments coques massives sont multiples : ils permettent de mailler aisément des géométries complexes où coques et solides doivent cohabiter sans les problèmes classiques de raccordement de maillages, ils sont capables de représenter le comportement de structures minces tout en prenant correctement en compte les phénomènes à travers l'épaisseur et avec un gain de temps de calcul significatif. Un élément de cette famille appelé « SHB8PS » a récemment été développé à partir d'une formulation purement tridimensionnelle [7-10]. Dans cette étude, la formulation du SHB8PS est revisitée avec une nouvelle projection pour éliminer certains blocages persistants en flexion et en cisaillement transverse.

FORMULATION DE L'ELEMENT SHB8PS

Interpolation et opérateur gradient discrétisé

Le SHB8PS est un élément isoparamétrique à huit nœuds et à interpolation linéaire. Les coordonnées x_i , $i=1,2,3$ d'un point de l'élément sont reliées aux coordonnées nodales x_{ii} via les fonctions de formes classiques N_i ($i=1,\dots,8$). L'interpolation des vitesses est similaire :

$$v_i = v_{ii} N_i(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^8 v_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

Combinant ces équations, on arrive à développer la vitesse :

$$\begin{cases} v_i = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y + a_{3i}z + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 \\ h_1 = \eta\zeta, h_2 = \zeta\xi, h_3 = \xi\eta, h_4 = \xi\eta\zeta \end{cases} \quad (2)$$

Les constantes inconnues a_{ji} et c_{ai} sont obtenues par l'introduction des vecteurs de *Hallquist* [2] (\underline{b}_i , $i = 1, \dots, 3$) :

$$\underline{b}_i^T = \underline{N}_{.i}(0, 0, 0) \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Hallquist Form} \quad (3)$$

On démontre d'abord des relations d'orthogonalité impliquant ces vecteurs \underline{b}_i et les vecteurs définis par :

$$\begin{cases} \underline{d}_i^T = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{i8}) & \text{vitesses nodales} \\ \underline{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{i8}) & \text{coordonnées nodales} \\ \underline{s}^T = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \underline{h}_4^T = (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1) \\ \underline{h}_2^T = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1) \\ \underline{h}_3^T = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1) \\ \underline{h}_1^T = (-1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1) \end{cases} \quad (4)$$

Ces orthogonalités permettent de calculer les constantes et d'écrire le gradient de vitesse sous la forme très pratique :

$$v_{i,j} = (\underline{b}_j^T + h_{\alpha,j} \underline{\gamma}_\alpha^T) \cdot \underline{d}_i = \left(\underline{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^4 h_{\alpha,j} \underline{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \underline{d}_i \quad (5)$$

$$\text{où } \underline{\gamma}_\alpha = \frac{1}{8} \left[\underline{h}_\alpha - \sum_{j=1}^3 (\underline{h}_\alpha^T \cdot \underline{x}_j) \underline{b}_j \right]$$

Ceci permet d'exprimer l'opérateur gradient discrétisé reliant le taux des déformations aux vitesses nodales :

$$\underline{\underline{\nabla}}_s(\underline{v}) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{d}} \quad (\text{convention de sommation sur indices répétés})$$

$$\text{avec : } \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1^T + h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \underline{b}_2^T + h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \underline{b}_3^T + h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \\ \underline{b}_1^T + h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & \underline{b}_2^T + h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & \underline{b}_2^T + h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & \underline{b}_3^T + h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \\ \underline{b}_1^T + h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 & \underline{b}_3^T + h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

Stabilisation et contrôle des modes cinématiques

En suivant la démarche de Belytschko et Bindeman [4], nous allons analyser les modes à énergie nulle du SHB8PS. Notons que pour donner au SHB8PS un comportement de type coque, nous avons modifié la loi de comportement 3D pour se rapprocher des hypothèses de contraintes planes et nous utilisons cinq points d'intégration disposés à travers une direction privilégiée que l'on appelle épaisseur. Cette sous-intégration a pour but aussi d'améliorer les performances de l'élément en termes de temps de calcul et d'éviter certains blocages en flexion et cisaillement. Ainsi, la raideur élastique s'obtient par intégration de Gauss :

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} d\Omega = \sum_{I=1}^5 \omega(\zeta_I) J(\zeta_I) \underline{\underline{B}}^T(\zeta_I) \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}(\zeta_I) \quad (7)$$

En remarquant qu'aux cinq points de Gauss de coordonnées $\zeta_I = \eta_I = 0$, $\zeta_I \neq 0$, les fonctions $h_{\alpha,i}$ ($\alpha = 3, 4$; $i = 1, 2, 3$) sont nulles, l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ de l'équ. (6) se réduit à :

$$\underline{\underline{B}}_{12} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \underline{b}_2^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & \underline{b}_3^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \\ \underline{b}_1^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & \underline{b}_2^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 \\ 0 & \underline{b}_2^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,2} \underline{\gamma}_\alpha^T & \underline{b}_3^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \\ \underline{b}_1^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,1} \underline{\gamma}_\alpha^T & 0 & \underline{b}_3^T + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha,3} \underline{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pour étudier le noyau de la rigidité, on construit une base des déplacements discrétisés et on montre que l'intégration réduite a baissé le rang de la raideur discrétisée. En effet, on montre qu'en plus des six modes rigides (3 translations et 3 rotations) les 6 vecteurs suivants sont dans le noyau de $\underline{\underline{K}}_e$:

$$\begin{pmatrix} \underline{h}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{h}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{h}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{h}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{h}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{h}_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Pour contrôler ces 6 modes de *hourglass*, il faut rajouter à la raideur une rigidité de stabilisation. Pour cela, on décompose l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ en la somme de deux termes :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}_{12} + \underline{\underline{B}}_{34} \quad (10)$$

Le 2nd terme $\underline{\underline{B}}_{34}$ est celui qui s'annule aux points de Gauss.

La raideur définie par l'équ. (7) s'exprime alors comme :

$$\underline{\underline{K}}_e = \underline{\underline{K}}_{12} + \underline{\underline{K}}_{STAB} \quad (11)$$

Le 1^{er} terme $\underline{\underline{K}}_{12}$ est celui obtenu par intégration de Gauss (éq. (7)). Le 2nd terme $\underline{\underline{K}}_{STAB}$ représente la rigidité de stabilisation car il est nul si évalué aux points de Gauss :

$$\underline{\underline{K}}_{STAB} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{12}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{12} d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{34} d\Omega \quad (12)$$

Projection de type « Assumed Strain »

Pour éliminer les blocages en cisaillement transverse et en flexion, l'opérateur gradient discrétisé est projeté sur un sous-espace approprié. Cette technique de projection peut se mettre sous le formalisme de la méthode de déformation postulée « Assumed Strain ». On montre également que cette démarche peut être justifiée dans le cadre du principe variationnel mixte statique non linéaire de Hu-Washizu :

$$\delta\pi(\underline{v}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}) = \int_{\Omega_e} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \delta \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot (\underline{\nabla}_s(\underline{v}) - \underline{\underline{\varepsilon}}) d\Omega - \delta \underline{\underline{d}}^T \cdot \underline{f}^{ext} = 0$$

Si on choisit une contrainte postulée $\underline{\underline{\sigma}}$ orthogonale à la différence entre le taux de déformation et le taux de déformation postulée $\underline{\underline{\varepsilon}}$, alors ce principe se simplifie :

$$\delta\pi(\underline{v}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\Omega_e} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega - \delta \underline{\underline{d}}^T \cdot \underline{f}^{ext} = 0 \quad (13)$$

En exprimant le champ « Assumed Strain » $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction d'un opérateur $\underline{\underline{B}}$ projeté à partir de l'opérateur gradient discrétisé classique $\underline{\underline{B}}$ défini en éq. (6) et (10), il vient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x, t) = \underline{\underline{B}}(x) \cdot \underline{\underline{d}}(t) \quad (14)$$

Ainsi, les forces internes de l'élément s'obtiennent par :

$$\underline{f}^{int} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T(x) \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \quad (15)$$

Pour un comportement linéaire : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$, on a la raideur :

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} d\Omega \quad (16)$$

Avant de définir l'opérateur projeté $\underline{\underline{B}}$, nous remplaçons dans toutes les formules précédentes la forme de *Hallquist* [2] des vecteurs \underline{b}_i (éq. (3)) par la forme moyenne de *Flanagan-Belytschko* [1] $\hat{\underline{b}}_i$:

$$\hat{\underline{b}}_i^T = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_i(\xi, \eta, \zeta) d\Omega_e, \quad i=1,2,3 \quad \text{Formules moyennes.}$$

Ceci revient à remplacer les vecteurs $\underline{\gamma}_\alpha$ par $\hat{\underline{\gamma}}_\alpha$ et par conséquent l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ par l'opérateur $\hat{\underline{\underline{B}}}$ défini par :

$$\hat{\underline{\underline{B}}} = \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} + \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} \quad (17)$$

Notons ici une première différence importante avec la précédente version du SHB8PS dans laquelle, les formules de *Hallquist* ont été remplacées par les formules moyennes de *Flanagan-Belytschko* seulement dans les termes de stabilisations $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ et donc $\underline{\underline{K}}_{STAB}$.

Notons que les deux formes \underline{b}_i et $\hat{\underline{b}}_i$ ont été testées et la forme moyenne s'est montrée plus efficace voir réf. [7-10].

On peut à ce stade projeter $\hat{\underline{\underline{B}}}$ en un opérateur $\underline{\underline{B}}$ tel que :

$$\underline{\underline{B}} = \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} + \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} \quad (18)$$

Notons que seul le terme $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ a été projeté, le terme $\hat{\underline{\underline{B}}}_{12}$ reste donné par l'éq. (8) où l'on remplace \underline{b}_i par $\hat{\underline{b}}_i$.

L'opérateur $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ est projeté en $\underline{\underline{B}}_{34}$ donné par l'expression :

$$\underline{\underline{B}}_{34} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha=3}^4 h_{\alpha,x} \hat{\underline{\gamma}}_\alpha^T & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=3}^4 h_{\alpha,y} \hat{\underline{\gamma}}_\alpha^T & 0 \\ 0 & 0 & h_{3,z} \hat{\underline{\gamma}}_3^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{4,x} \hat{\underline{\gamma}}_4^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

La raideur élastique est alors donnée par l'éq. (11) avec :

$$\underline{\underline{K}}_{12} = \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} d\Omega = \sum_{I=1}^5 \omega(\zeta_I) J(\zeta_I) \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T(\zeta_I) \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}(\zeta_I)$$

$$\underline{\underline{K}}_{STAB} = \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} d\Omega$$

Pour le calcul de cette rigidité de stabilisation on se place dans un repère co-rotationnel (voir réf. [7-10]). Le choix de ce repère tournant avec l'élément et aligné avec le repère de référence est justifié ici par la rotation extraite de la décomposition en produit du gradient de la transformation. Les avantages de cette formulation co-rotationnelle sont multiples : simplification des formules donnant la matrice de stabilisation dont les termes croisés s'annulent, le traitement du blocage en cisaillement est plus efficace, formulation mieux adaptée aux non linéarités géométriques.

VALIDATION SUR DES CAS TESTS

Pour valider cette nouvelle version du SHB8PS, nous l'avons testée sur un ensemble de dix cas tests élastiques. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence et d'autre part, à la solution donnée par la version précédente du SHB8PS (voir réf. [10]). Notons que plusieurs projections ont été formulées dans cette étude et testées sur l'ensemble des cas tests. La projection retenue et présentée ici est celle qui a montré la meilleure convergence et l'absence des phénomènes de blocages numériques en flexion et cisaillement transverse. Cette projection a amélioré la version précédente du SHB8PS sur tous les cas tests et notamment sur celui de la sphère pincée où l'amélioration est très significative. Nous donnons ici les résultats relatifs à ce dernier cas test.

Hémisphère pincé

Ce cas test est devenu très populaire et a été repris par de nombreux auteurs depuis MacNeal et Harder [3]. Il est particulièrement sévère car le blocage en cisaillement transverse est important et accentué par la géométrie du problème (caractère "distordu" et "gauche" des éléments). La Fig. 1 montre la géométrie, le chargement et les conditions aux limites pour ce cas test. Le rayon est R=10,

l'épaisseur $t=0,04$, le module d'Young $E=6,825 \times 10^7$, le coefficient de Poisson $\nu=0,3$. En utilisant les plans de symétries, un quart de l'hémisphère seulement est maillé avec deux forces unitaires selon Ox et Oy . Les conditions aux limites sont libres, toutefois pour éviter les mouvements de corps rigides on bloque le déplacement selon Oz d'un point en plus des conditions de symétries. La solution de référence trouvée en [3] donne un déplacement du point A dans la direction Ox égal à 0,0924 (voir Fig. 1).

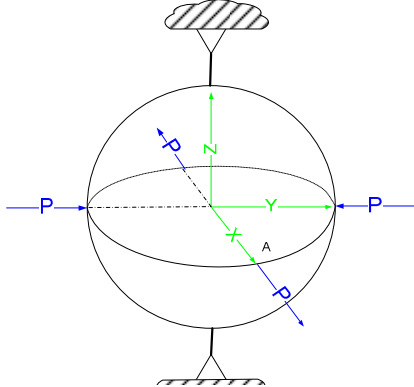


Fig. 1. Géométrie et chargement pour la sphère pincée.

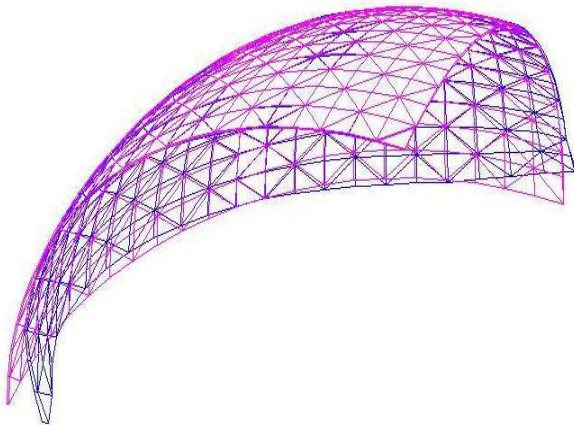


Fig. 2. Etats initial et déformé de la coque sphérique pincée.

Résultats numériques de convergence

	SHB8PS (ancienne version)	HEXDS	H8-ct-cp	SHB8PS (nouvelle version)
Nombre d'éléments	Ux/Uréf	Ux/Uréf	Ux/Uréf	Ux/Uréf
12	0,0629		0,05	0,8645
27	0,0474			1,0155
48	0,1660	0,408	0,35	1,0098
75	0,2252	0,512	0,58	1,0096
192	0,6332	0,701	0,95	1,0008
363	0,8592	0,800		1,0006
768	0,9651			1,0006
1462	0,9910			1,0009

Tab. 1. Déplacement normalisé du point A de l'hémisphère.

La nouvelle version du SHB8PS est comparée à l'ancienne et aux deux éléments HEXDS et H8-ct-cp. L'élément HEXDS possède huit nœuds et quatre points de Gauss [5]. L'élément H8-ct-cp de Lemosse est présenté dans [6]. Le

tableau 1 montre que la nouvelle version du SHB8PS donne une excellente convergence et ne présente aucun blocage.

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Une nouvelle formulation de l'élément de coque massif « SHB8PS » a été implantée dans un code de calcul par éléments finis implicite et testée sur un ensemble de dix cas tests élastiques. Rappelons que cet élément est sous-intégré pour améliorer ses performances de calculs et bénéficie d'une stabilisation efficace pour contrôler les modes parasites (*hourglass*). De plus, grâce à la projection utilisée dans cette nouvelle version du SHB8PS, nous allons beaucoup plus loin dans l'élimination des phénomènes de verrouillage. En effet, les performances de l'élément en termes d'efficacité et de rapidité de convergence sont clairement démontrées à travers les cas tests et en particulier celui de l'hémisphère pincé. La validation de cette version du SHB8PS en non linéaire géométrique et matériau (flambage, plasticité ...) constitue la prochaine étape de cette étude. De même, une version explicite sera implantée dans un code de dynamique rapide pour la valider sur des problèmes d'impact ou de crash.

REFERENCES

- [1] FLANAGAN D.P. and BELYTSCHKO T., "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control". *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 17, pp. 679-706, 1981.
- [2] HALLQUIST J.O., "Theoretical manual for DYNA3D". UC1D-19401 Lawrence Livermore National Lab., University of California, 1983.
- [3] MACNEAL R.H. and HARDER R.L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy". *Finite Elements in Analysis and Design*, 1: 3-20, 1985.
- [4] BELYTSCHKO T. and BINDEMAN L.P., "Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 105, pp. 225-260, 1993.
- [5] LIU W.K., GUO Y., TANG S. and BELYTSCHKO T., "A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis". *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 154, pp. 69-132, 1998.
- [6] LEMOSSE D., "Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces". Thèse, Ecole Doctorale SPMI/INSA-Rouen, 2000.
- [7] ABED-MERAIM F. et COMBESURE A., "Stabilité des éléments finis sous-intégrés". Rapport interne n° 247, LMT de Cachan, Janvier, 2001.
- [8] ABED-MERAIM F. and COMBESURE A., "SHB8PS a new intelligent assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis on a rotating body". *First M.I.T. Conference on Comput. Fluid and Solid Mechanics, 12-15 June, U.S.A.*, 2001.
- [9] ABED-MERAIM F. and COMBESURE A., "SHB8PS- a new adaptative, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis". *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 791-803, 2002.
- [10] LEGAY A. and COMBESURE A., "Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS". *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 57, pp. 1299-1322, 2003.