



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/26450>

To cite this version :

Farid ABED-MERAIM, Alain COMBESCURE - Stabilisation et projection de type « Assumed Strain » de l'élément de coque massif « SHB8PS » pour éliminer les problèmes de verrouillage - In: 7ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2005), France, 2005-05-17 - Actes du 7ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2005) - 2005

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



Stabilisation et projection de type « Assumed Strain » de l'élément de coque massif « SHB8PS » pour éliminer les problèmes de verrouillage

Farid Abed-Meraim* — Alain Combescure**

* *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, ENSAM CER de Metz
UMR CNRS 7554
4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz
farid.abed-meraim@metz.ensam.fr*

** *Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides, INSA de Lyon
UMR CNRS 5514
18-20 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne
alain.combescure@insa-lyon.fr*

RÉSUMÉ. Dans cette étude, la formulation de l'élément « SHB8PS » est revisitée dans le but d'éliminer certains blocages persistants en membrane ou cisaillement transverse. Rappelons que cet élément est de type coque épaisse obtenue à partir d'une formulation purement tridimensionnelle. Il possède donc huit nœuds et cinq points d'intégration répartis selon la direction de l'épaisseur. Ainsi, il peut être utilisé pour modéliser des structures minces tout en prenant correctement en compte les différents phénomènes à travers l'épaisseur. Afin d'améliorer ses performances de calcul et d'éviter certains blocages, l'intégration réduite a été employée. Les modes de hourglass générés par la sous-intégration sont efficacement stabilisés et les modes de blocages persistants sont éliminés par une technique de projection pouvant se mettre sous le formalisme de la « Méthode de Déformation Postulée ».

ABSTRACT. In this work, the formulation of the finite element "SHB8PS" is revisited in order to eliminate some persistent membrane locking or transverse shear locking. Let us recall that the "SHB8PS" is a continuum mechanics shell element obtained from a purely three-dimensional formulation. It therefore possesses eight nodes and five integration points distributed according to the thickness direction. Thus, it can be used to model thin structures while correctly taking into account the various phenomena throughout the thickness. In order to improve its calculation performances and to avoid some blockages, reduced integration was employed. The hourglass modes generated by under-integration are efficiently stabilized and the persistent locking modes are eliminated using a projection technique entering under the "Assumed Strain Method" formalism.

MOTS-CLÉS : Coque massive SHB8PS, Hourglass, Blocage, Déformation Postulée, Projection.

KEYWORDS: SHB8PS solid shell, Hourglass, Locking, Assumed Strain Method, Projection.

1. Introduction

Plusieurs travaux ont été consacrés au développement d'éléments finis solides capables de modéliser des structures minces. Les avantages de tels éléments coques massives sont multiples : ils permettent de mailler aisément des géométries complexes où coques et solides doivent cohabiter sans les problèmes classiques de raccordement de maillages, ils sont capables de représenter le comportement de structures minces tout en prenant correctement en compte les phénomènes à travers l'épaisseur et avec un gain de temps de calcul significatif. Un élément de cette famille appelé « SHB8PS » a récemment été développé à partir d'une formulation purement tridimensionnelle (Abed-Meraim *et al.*, 2001, 2002), (Legay *et al.*, 2003). Dans cette étude, la formulation du SHB8PS est revisitée avec une nouvelle projection pour éliminer certains blocages persistants en membrane et cisaillement.

2. Formulation de l'élément SHB8PS

2.1. Interpolation et opérateur gradient discrétisé

Le SHB8PS est un élément isoparamétrique à huit nœuds et à interpolation linéaire. Les coordonnées x_i , $i = 1, 2, 3$ d'un point de l'élément sont reliées aux coordonnées nodales x_{iI} via les fonctions de formes classiques N_I ($I=1,\dots,8$). L'interpolation du champ des déplacements est similaire :

$$u_i = u_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^8 u_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad [1]$$

Combinant ces équations, on peut développer le champ de déplacement comme :

$$u_i = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}y + a_{3i}z + c_{1i}h_1 + c_{2i}h_2 + c_{3i}h_3 + c_{4i}h_4 \quad [2]$$

avec : $h_1 = \eta\zeta$, $h_2 = \zeta\xi$, $h_3 = \xi\eta$, $h_4 = \xi\eta\zeta$. Les constantes inconnues a_{ji} et c_{ai} sont obtenues par l'introduction des vecteurs de (Hallquist, 1983), (\underline{b}_i , $i = 1, \dots, 3$) :

$$\underline{b}_i^T = \underline{N}_i(0, 0, 0) \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Hallquist Form} \quad [3]$$

On démontre d'abord des relations d'orthogonalité impliquant ces vecteurs \underline{b}_i et les vecteurs : $\underline{x}_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i8})$, (coordonnées nodales), $\underline{d}_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i8})$ (déplacements nodaux), ainsi que : \underline{s} , \underline{h}_1 , \underline{h}_2 , \underline{h}_3 et \underline{h}_4 : voir (Abed-Meraim *et al.*, 2001).

Ces relations d'orthogonalité permettent de calculer les constantes a_{ji} et c_{ai} et d'écrire le gradient de déplacement sous la forme très pratique suivante :

$$u_{i,j} = \left(\underline{b}_j^T + h_{\alpha,j} \underline{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \underline{d}_i = \left(\underline{b}_j^T + \sum_{\alpha=1}^4 h_{\alpha,j} \underline{\gamma}_\alpha^T \right) \cdot \underline{d}_i \quad [4]$$

où : $\underline{\gamma}_\alpha = \frac{1}{8} \left(\underline{h}_\alpha - \sum_{j=1}^3 (\underline{h}_\alpha^T \cdot \underline{x}_j) \underline{b}_j \right)$.

Ceci permet d'exprimer l'opérateur gradient discrétisé reliant les déformations aux déplacements nodaux : $\underline{\underline{\nabla}}_s(\underline{u}) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{d}$.

2.2. Stabilisation et contrôle des modes cinématiques

En suivant la démarche de (Belytschko *et al.*, 1993), nous allons analyser les modes à énergie nulle du SHB8PS. Notons que pour donner au SHB8PS un comportement de type coque, nous avons modifié la loi de comportement 3D pour se rapprocher des hypothèses de contraintes planes et nous utilisons cinq points d'intégration disposés à travers une direction privilégiée que l'on appelle épaisseur. Cette sous-intégration a pour but aussi d'améliorer les performances de l'élément en termes de temps de calcul et d'éviter certains blocages en membrane et en cisaillement. Ainsi, la raideur élastique s'obtient par intégration de Gauss :

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} d\Omega = \sum_{i=1}^5 \omega(\zeta_i) J(\zeta_i) \underline{\underline{B}}^T(\zeta_i) \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}(\zeta_i) \quad [5]$$

En remarquant qu'aux cinq points de Gauss de coordonnées $\xi_i = \eta_i = 0$, $\zeta_i \neq 0$ les termes $h_{\alpha,i}$ ($\alpha = 3, 4$; $i = 1, 2, 3$) sont nuls, l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ défini d'après l'équ. [4] se réduit à $\underline{\underline{B}}_{12}$ dans lequel les sommations sur l'indice α ne vont que de 1 à 2.

Pour étudier le noyau de la rigidité, on construit une base des déplacements discrétisés et on montre que l'intégration réduite a baissé le rang de la raideur discrétisée. En effet, on montre qu'en plus des six modes rigides (3 translations et 3 rotations) les 6 vecteurs suivants sont dans le noyau de $\underline{\underline{K}}_e$:

$$(\underline{h}_\alpha, \underline{0}, \underline{0})^T, (\underline{0}, \underline{h}_\alpha, \underline{0})^T, (\underline{0}, \underline{0}, \underline{h}_\alpha)^T ; \alpha=3,4 \quad [6]$$

Pour contrôler ces 6 modes de *hourglass*, il faut rajouter à la raideur une rigidité de stabilisation. Pour cela, on décompose l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ en la somme suivante :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}_{12} + \underline{\underline{B}}_{34} \quad [7]$$

Le second terme $\underline{\underline{B}}_{34}$ est celui qui s'annule aux points de Gauss. La raideur définie par l'équation [5] s'exprime alors comme :

$$\underline{\underline{K}}_e = \underline{\underline{K}}_{12} + \underline{\underline{K}}_{STAB} \quad [8]$$

Le 1^{er} terme $\underline{\underline{K}}_{12}$ est celui obtenu par intégration de Gauss (équ. [5]). Le 2nd $\underline{\underline{K}}_{STAB}$ représente la rigidité de stabilisation car nul si évalué aux points de Gauss :

$$\underline{\underline{K}}_{STAB} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{12}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{12} d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}_{34}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}_{34} d\Omega \quad [9]$$

2.3. Projection de type « Assumed Strain »

Pour éliminer les blocages en cisaillement transverse et membrane, l'opérateur gradient discrétisé est projeté sur un sous-espace approprié. Cette technique de

projection peut se mettre sous le formalisme de la méthode de déformation postulée « Assumed Strain ». On montre aussi que cette démarche peut être justifiée dans le cadre du principe variationnel mixte statique non linéaire de Hu-Washizu. En effet, en exprimant le champ « Assumed Strain » $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction d'un opérateur $\underline{\underline{B}}$ projeté à partir de l'opérateur gradient discrétisé classique $\underline{\underline{B}}$ défini en [4] et [7], il vient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x, t) = \underline{\underline{B}}(x) \cdot \underline{d}(t) \quad [10]$$

Ainsi, les forces internes et la raideur élastique s'obtiennent par les équations :

$$\underline{f}^{int} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T(x) \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \quad ; \quad \underline{K}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\underline{B}} d\Omega \quad [11]$$

Avant de définir l'opérateur projeté $\underline{\underline{B}}$, nous remplaçons dans toutes les formules précédentes la forme de *Hallquist* des vecteurs \underline{b}_i (équ. [3]) par la forme moyenne $\hat{\underline{b}}_i$ de (Flanagan-Belytschko, 1981) :

$$\hat{\underline{b}}_i^T = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \underline{N}_{,i}(\xi, \eta, \zeta) d\Omega, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Formules moyennes.}$$

Ceci revient à remplacer les vecteurs $\underline{\gamma}_\alpha$ par $\hat{\underline{\gamma}}_\alpha$ et par conséquent l'opérateur $\underline{\underline{B}}$ par l'opérateur $\hat{\underline{\underline{B}}}$ défini par :

$$\hat{\underline{\underline{B}}} = \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} + \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} \quad [12]$$

Notons ici une première différence importante avec la précédente version du SHB8PS dans laquelle, les formules de *Hallquist* ont été remplacées par les formules moyennes seulement dans les termes de stabilisations $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ et donc \underline{K}_{STAB} .

Notons que les deux formes \underline{b}_i et $\hat{\underline{b}}_i$ ont été testées et que la forme moyenne s'est montrée plus efficace. On peut à ce stade projeter $\hat{\underline{\underline{B}}}$ en un opérateur $\bar{\underline{\underline{B}}}$ tel que :

$$\bar{\underline{\underline{B}}} = \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} + \bar{\underline{\underline{B}}}_{34} \quad [13]$$

Il est à noter que seul le 2nd terme $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ de [12] est projeté, le premier terme $\hat{\underline{\underline{B}}}_{12}$ reste inchangé avec \underline{b}_i remplacé par $\hat{\underline{b}}_i$. Ainsi, l'opérateur $\hat{\underline{\underline{B}}}_{34}$ est projeté en $\bar{\underline{\underline{B}}}_{34}$.

La raideur élastique est alors donnée par l'équ. [8] avec :

$$\begin{aligned} \underline{K}_{12} &= \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} d\Omega = \sum_{I=1}^5 \omega(\zeta_I) J(\zeta_I) \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T(\zeta_I) \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}(\zeta_I) \\ \underline{K}_{STAB} &= \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{34}^T \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \hat{\underline{\underline{B}}}_{12}^T \cdot \underline{C} \cdot \bar{\underline{\underline{B}}}_{34} d\Omega + \int_{\Omega_e} \bar{\underline{\underline{B}}}_{34}^T \cdot \underline{C} \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}_{12} d\Omega \end{aligned}$$

Pour le calcul de cette rigidité de stabilisation on se place dans un repère co-rotationnel (Belytschko *et al.*, 1993). Le choix de ce repère tournant avec l'élément est justifié ici par la rotation extraite de la décomposition en produit du gradient de la transformation. Les avantages de cette formulation co-rotationnelle sont multiples : simplification des formules donnant la matrice de stabilisation dont les termes croisés s'annulent, le traitement du blocage en cisaillement est plus efficace, cette formulation est mieux adaptée aux non linéarités géométriques.

3. Validation sur des cas tests

Pour valider cette nouvelle version du SHB8PS, nous l'avons testée sur un ensemble de dix cas tests élastiques. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence et d'autre part, à la solution donnée par la version précédente du SHB8PS (Legay *et al.*, 2003). Notons que plusieurs projections ont été formulées dans cette étude et testées sur l'ensemble des cas tests. La projection retenue est celle qui a montré la meilleure convergence et l'absence de blocages numériques. Cette projection a amélioré la version précédente du SHB8PS sur tous les cas tests et notamment sur celui de la sphère pincée où l'amélioration est très significative. Nous donnons ici les résultats relatifs à ce dernier cas test.

Ce cas test est devenu très populaire et a été repris par de nombreux auteurs depuis (MacNeal *et al.*, 1985). Il est particulièrement sévère car les blocages en membrane et en cisaillement transverse sont accentués par la géométrie du problème (caractère "distordu" et "gauche" des éléments). La Fig. 1 montre la géométrie, le chargement et les conditions aux limites. Le rayon est $R=10$, l'épaisseur $t=0,04$, le module d'Young $E=6,825 \times 10^7$, le coefficient de Poisson $\nu=0,3$. En utilisant les plans de symétries, un quart de l'hémisphère seulement est maillé avec deux forces unitaires selon O_x et O_y . Les conditions aux limites sont libres, toutefois pour éviter les mouvements de corps rigides on bloque le déplacement selon O_z d'un point en plus des conditions de symétries. La solution de référence trouvée (MacNeal *et al.*, 1985) donne un déplacement du point A dans la direction O_x égal à 0,0924 (Fig. 1).

	SHB8PS ancienne version	HEXDS	H8-ct-cp	SHB8PS nouvelle version
Nb. Elém.	$U_x/U_{réf}$	$U_x/U_{réf}$	$U_x/U_{réf}$	$U_x/U_{réf}$
12	0,0629		0,05	0,8645
27	0,0474			1,0155
48	0,1660	0,408	0,35	1,0098
75	0,2252	0,512	0,58	1,0096
192	0,6332	0,701	0,95	1,0008
363	0,8592	0,800		1,0006
768	0,9651			1,0006
1462	0,9910			1,0009

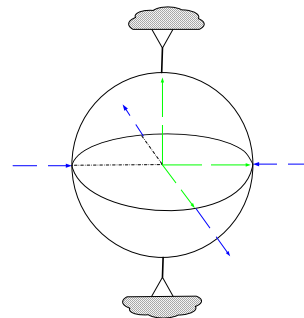


Fig. 1. Géométrie et chargement pour la sphère pincée.

Tab. 1. Déplacement normalisé du point A de l'hémisphère.

La nouvelle version du SHB8PS est comparée à l'ancienne et aux deux éléments HEXDS et H8-ct-cp. L'élément HEXDS possède huit nœuds et quatre points de Gauss (Liu *et al.*, 1998). L'élément H8-ct-cp est présenté dans le mémoire de thèse de Lemosse (Lemosse, 2000). Le tableau 1 montre que la nouvelle version du SHB8PS donne une excellente convergence et ne présente aucun blocage.

4. Discussion et conclusions

Une nouvelle formulation de l'élément de coque massif « SHB8PS » a été effectuée puis implantée dans un code de calcul par éléments finis implicite. Cette formulation a été ensuite testée sur un ensemble de plus de dix cas tests élastiques. Rappelons que cet élément est sous-intégré pour améliorer ses performances de calculs et bénéficie d'une stabilisation efficace pour contrôler les modes parasites (*hourglass*). De plus, grâce à la projection utilisée dans cette nouvelle version du SHB8PS, nous allons beaucoup plus loin dans l'élimination des phénomènes de verrouillage. En effet, les performances de l'élément en termes d'efficacité et de rapidité de convergence sont clairement démontrées à travers les cas tests et en particulier celui de l'hémisphère pincé.

5. Bibliographie

- Abed-Meraim F., Combescure A., Stabilité des éléments finis sous-intégrés, rapport interne n° 247, janvier 2001, LMT de Cachan.
- Abed-Meraim F., Combescure A., « SHB8PS a new intelligent assumed strain continuum mechanics shell element for impact analysis on a rotating body », *First M.I.T. Conference on Comput. Fluid and Solid Mechanics*, 12-15 June 2001, U.S.A.
- Abed-Meraim F., Combescure A., « SHB8PS- a new adaptative, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis », *Computers & Structures*, vol. 80, 2002, p. 791-803.
- Belytschko T., Bindeman, L.P., « Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element », *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engineering*, vol. 105, 1993, p. 225-260.
- Flanagan D.P., Belytschko T., « A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control », *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, vol. 17, 1981, p. 679-706.
- Hallquist J.O., *Theoretical manual for DYNA3D*, UC1D-19401 Lawrence Livermore National Lab., University of California, 1983.
- Legay A., Combescure A., « Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 57, 2003, p. 1299-1322.
- Lemosse D., Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale SPMI/INSA-Rouen, 2000.
- Liu W.K., Guo Y., Tang S., Belytschko T., « A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 154, 1998, p. 69-132.
- MacNeal R.H., Harder R.L., « A proposed standard set of problems to test finite element accuracy », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, 1985, p. 3-20.