



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/6483>

#### **To cite this version :**

Philippe AUQUIERT, Wilfrid PERRUQUETTI, Olivier GIBARU - c - 2006

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# Approximation par des B-Splines de solutions optimales pour des problèmes $LQ$ : une estimation a posteriori de l'erreur

Philippe AUQUIERT<sup>1</sup>, Olivier GIBARU<sup>2</sup>, Wilfrid PERRUQUETTI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LAMAV, Université de Valenciennes, 59133 Valenciennes Cedex, France

<sup>2</sup>L2MA, ENSAM de Lille, 8 Bld Louis XIV, 59046 Lille Cedex, France  
olivier.gibaru@lille.ensam.fr

<sup>3</sup>LAGIS UMR CNRS 8146, Equipe SyNeR, Ecole Centrale de Lille, 59800 Villeneuve D'Ascq, France  
wilfrid.perruquetti@ec-lille.fr

<http://syner.ec-lille.fr/robocoop/>

**Résumé**— Nous proposons une alternative à l'équation de Riccati lors de la résolution de systèmes linéaires quadratiques en contrôle optimale. Une transformation de l'équation d'état basée sur la forme de Brunoswski de ce système permet de mettre en évidence une représentation sous la forme de sorties dites plates. Le système ainsi transformé nous permet d'exprimer le problème de contrôle optimal sous la forme d'un problème variationnel. Une approximation par une B-Spline des sorties plates est proposée ainsi que la majoration a posteriori de l'erreur commise. L'intérêt de cette majoration d'erreur est qu'elle permet d'optimiser le placement des noeuds de la B-Spline afin de satisfaire une tolérance donnée.

**Mots-clés**— commande  $LQ$ , platitude, B-Spline

## I. INTRODUCTION

Soient  $u$  la commande du système à étudier (ou entrée) et  $x$  l'état de ce système alors la planification de trajectoire de ce système consiste à déterminer une trajectoire  $t \mapsto (x(t), u(t))$  partant d'un état initial  $x_i$  en  $t = 0$  et amenant le système à un état final  $x_f$  en  $t = T$ . Ces deux états sont d'ailleurs en général fixés à l'avance.

Si le système est commandable, on dispose alors en général d'une infinité de trajectoires pour passer de  $x_i$  à  $x_f$ . Il faut alors faire un choix parmi l'ensemble des trajectoires possibles. C'est le problème de la commande optimale. Cette sélection est réalisée par la minimisation de certains critères (temps, vitesse, ...) et en tenant compte de contraintes (commande bornée, ...). La résolution du problème permet de déterminer une trajectoire de référence  $(x_r(t), u_r(t))$ .

Pour les systèmes linéaires et un critère  $LQ$ , on utilise généralement l'équation de Riccati Algébrique dans le cas d'un horizon temporel infini ou différentielle pour un horizon fini (Cf. [14]). Nous proposons dans cet article et [13] une autre approche basée sur la platitude. La platitude des systèmes [8], [7], [9] est une propriété naturelle qui permet de décrire entièrement le comportement d'un système par le comportement de variables particulières appelées sorties plates. Cette propriété est fondamentale pour la planification

de trajectoire (voir par exemple [12], [15]). Cette approche a permis d'obtenir des résultats intéressants pour des problèmes de commande optimale [10], [2], [18], [16], [19]. Si l'horizon temporel est infini, il est montré dans [13] que les coefficients du retour d'état répondant au problème s'obtiennent en calculant les racines d'un polynôme. Nous allons voir ici que dans le cas d'un horizon temporel fini, nous retombons sur un problème de Dirichlet. Afin de trouver une solution à ce problème avec une précision souhaitée, nous allons voir que le calcul de cette trajectoire peut être effectué par approximation. Nous proposons de le faire en utilisant une approximation par B-Splines polynomiales où l'erreur a posteriori est calculée. Cette estimation nous permet de définir un algorithme de calcul permettant de placer les noeuds de la B-Spline afin de satisfaire une tolérance fixée sur l'erreur d'approximation.

Illustrons ceci sur l'exemple suivant :

*Exemple 1:* Calculons la commande optimale qui minimise le critère

$$\mathcal{J} = \int_0^T c^2 x^2(t) + u^2(t) dt,$$

s.l.c.  $x(T) = x_f$  pour le système

$$\dot{x} = bx + u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cela revient à minimiser le critère

$$\mathcal{J} = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

avec  $L(x(t), \dot{x}(t)) = c^2 x^2(t) + (\dot{x} - bx)^2(t)$ . L'équation d'Euler-Lagrange impose que  $x$  soit solution de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Soit  $\ddot{x} - b\dot{x} = c^2 x - b(\dot{x} - bx)$  ou encore en posant  $b^\# = \sqrt{c^2 + b^2}$ ,

$$\ddot{x} = b^\# x, \tag{1}$$

c'est-à-dire que

$$x(t) = a_- \exp(-b^\sharp t) + a_+ \exp(b^\sharp t). \quad (2)$$

Etant donné que l'on souhaite  $x(0) = x_i, x(T) = x_f$ , on distingue alors les deux cas suivants :

- Si  $T = \infty$  et  $x_f = 0$  (stabilisation) alors on doit avoir  $a_+ = 0$  ainsi  $x(t) = x_i \exp(-b^\sharp t)$ ,  $u = \dot{x} - bx = -(b+b^\sharp)x$ . Le contrôle est obtenu simplement en déterminant les racines d'un polynôme. Pour plus de détails voir [13].
- Dans le cas général sur un horizon temporel fini nous retombons sur un problème de Dirichlet à savoir trouver une solution de l'équation différentielle (1) avec les conditions frontières  $x(0) = x_i, x(T) = x_f$ . Sur cet exemple on peut obtenir la solution à la main (2) où on obtient après calculs :  $a_- = \frac{1}{2}(x_f - x_i \exp(-b^\sharp T)) \sinh(-b^\sharp T)$  et  $a_+ = \frac{1}{2}(x_f - x_i \exp(b^\sharp T)) \sinh(b^\sharp T)$ . Ce calcul formel n'est plus possible pour  $n > 2$ . En effet, il est bien connu que la résolution numérique de ce type de problème est délicate (notamment lorsque la dimension du système est grande) et devient très complexe en présence de nonlinéarités. Nous allons voir comment obtenir une solution approchée en utilisant des B-splines.

## II. DÉFINITION DE LA PLATITUDE

La platitude est une propriété naturelle de certains systèmes dynamiques. Elle concerne autant les systèmes linéaires que non linéaires [7], [8], [9], [12] et peut être étendue pour des systèmes à retards ou régis par des Equations aux dérivées partielles [15]. Le système est dit plat si toute sa dynamique peut être décrite par la dynamique de la sortie plate. Actuellement, il existe des critères pour montrer qu'un système est plat, mais trouver cette sortie plate reste un grand défi dans le cas général. Néanmoins, pour de nombreux systèmes physique les sorties plates sont déjà connues et ont souvent un sens physique (Cf. [7], [8], [9], [12]).

*Définition 1:* [7], [8], [9], [12] On considère le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  et  $f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ce système est plat s'il existe  $m$  fonctions (dépendant des entrées, des dérivées des entrées jusqu'à l'ordre  $s \leq n$  et de l'état) notées et appelées sorties plates, tels que l'état et la commande puissent être exprimés en fonction de la sortie plate et de ces dérivés. Ce qui revient à dire qu'il existe trois fonctions  $h : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\phi : (\mathbb{R}^m)^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\varphi : (\mathbb{R}^m)^{s+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que

$$\begin{aligned} y_f &= h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)}) \\ x &= \phi(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(s-1)}) \\ u &= \varphi(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(s)}) \end{aligned} \quad (4)$$

Considérons le système linéaire

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (5)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}$  est le vecteur des entrées, la matrice  $A$  est de taille  $n \times n$  et le vecteur  $B$  de taille  $n$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit commandable est que le rang de la matrice blocs  $C(A, B) = (B : AB : \dots : A^{n-1}B)$  soit égal à  $n$ .

Dans le cas d'une seule entrée  $u \in \mathbb{R}$ ,  $C(A, B)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et de rang  $n$ . Elle est donc inversible. En posant  $z = C(A, B)^{-1}x$ , on obtient un système équivalent

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -a_n z_n + u, \\ \dot{z}_2 = z_1 - a_{n-1} z_n, \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} - a_1 z_n, \end{cases}$$

où les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $A$  noté  $\pi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \lambda^i + \lambda^n$ . La fonction  $y_f = z_n$  est appelée sortie plate du système (Cf. [8]). Le vecteur d'entrée  $u$  et le vecteur d'état  $x$  s'écrivent en fonction d'une sortie plate et de ses dérivées. Il vient après calculs que :

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} a_i z_n^{(n-i)} + z_n^{(n)},$$

$$\text{et } x = C(A, B) \cdot L_A \cdot \begin{pmatrix} z_n \\ \dot{z}_n \\ \vdots \\ z_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

où  $L_A$  est la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Pour déterminer les coefficients de  $\pi_A(\lambda)$  on utilise l'algorithme classique de Souriau suivant :  $M_0 = I$ , pour  $p = 1, \dots, n$  :  $M_p = AM_{p-1} + a_p I$  avec  $a_p = -\frac{1}{2} \text{Trace}(AM_{p-1})$ .

## III. COMMANDE OPTIMALE DE SYSTÈMES LINÉAIRES QUADRATIQUES VIA LA PLATITUDE

Nous souhaitons déterminer la commande  $u$  continue par morceaux sur  $[0, T]$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (8)$$

où  $Q$  et  $R$  sont des matrices symétriques définies positives.

Lorsque  $T = \infty$  (horizon temporel infini), les trajectoires optimales pour ce problème sont obtenues pour le contrôle

$$u = -R^{-1} B^T P x, \quad (9)$$

où  $P$  est l'unique matrice symétrique définie positive vérifiant l'équation de Riccati

$$A^T P + P A - (P B) R^{-1} (P B)^T + Q = 0. \quad (10)$$

Alors que dans le cas général,  $u$  est donné par (9) et pour  $P$ , il faut résoudre l'équation de Riccati différentielle suivante

$$\dot{P} + A^T P + P A - (P B) R^{-1} (P B)^T + Q = 0. \quad (11)$$

Nous allons maintenant voir comment en utilisant la platitude nous pouvons reformuler ce problème différemment. D'après ce qui précède le système (5) est plat. En utilisant les relations (6) et (7), il est alors possible d'exprimer la fonctionnelle à minimiser en fonction de la sortie plate et de ses dérivées successives. En effet, si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ C(A, B) \cdot L_A \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \quad \dots \quad a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors la fonctionnelle (8) s'écrit :

$$J(Z(t)) = \frac{1}{2} \int_0^T Z(t)^T \alpha Z(t) dt, \quad (12)$$

où  $Z(t)^T = (z_n(t), \dot{z}_n(t), \dots, z_n^{(n)}(t))$  et

$$\alpha = P^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} P$$

est une matrice carrée de dimension  $n+1$ .

La condition nécessaire d'Euler-Lagrange généralisée nous permet de conclure que la solution à (12) doit satisfaire à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in [0, T], \sum_{i=0}^n \gamma_i z_n^{(2i)}(t) = 0, \quad (13)$$

où après calculs on montre que

$$\gamma_i = \sum_{j=\max(0, 2i-n)}^{\min(2i, n)} (-1)^j \alpha_{j+1, 2i+1-j}.$$

Les conditions aux extrémités sur le vecteur d'état imposent que

$$C(A, B) \cdot L_A \cdot Z(t) \Big|_{t=0 \text{ (resp. } t=T)} = x_i \text{ (resp. } x_f). \quad (14)$$

#### IV. UNE B-SPLINE COMME SOLUTION APPROCHÉE DE LA SORTIE PLATE

Etant donné un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p = T\}$  une subdivision de  $[0, T]$  où  $p$  est un entier non nul fixé. On construit alors à partir de  $\sigma$  une suite  $\delta$  de noeuds permettant de définir une B-Spline comme suit :

$$t_0 = \dots = t_k = x_0 < t_{k+1} = x_1 < \dots < t_{k+p} = \dots = t_{2k+p} = x_p.$$

Nous donnons dans la proposition suivante un résultat concernant l'approximation de la sortie plate  $z_n$  sur  $[0, T]$

par une courbe B-Spline notée  $y_f(t) = \sum_{i=0}^{k+p-1} N_i^k(t) P_i$  (Cf. [3]).

*Proposition 1:* La solution de (12) sous les contraintes (14) avec  $Z(t)^T = (y_f(t), \dots, y_f^{(n)}(t))$  et  $k > n$  est unique. Elle est obtenue par la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \text{pour } l = n, \dots, k+p-n-1, \\ & \sum_{s=n}^{k+p-n-1} \beta_{s,l}(T) P_s = - \sum_{\substack{s \in \{0, \dots, n-1\} \\ \cup \{k+p-n, \dots, k+p-1\}}} \beta_{s,l}(T) P_s, \end{aligned}$$

où  $\beta_{s,l} = \int_0^T \frac{1}{2} (N_s(t)^T \alpha N_l(t) + N_l(t)^T \alpha N_s(t)) dt$  avec  $N_i(t)^T = ((N_i^k)(t), (N_i^k)^{(1)}(t), \dots, (N_i^k)^{(n)}(t))$ . Les conditions aux extrémités (14) imposent les  $P_m$  pour  $m \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+p-n, \dots, k+p-1\}$ .

Remarque : La matrice  $\alpha$  est symétrique il vient que  $\beta_{s,l} = \beta_{l,s}$ . De plus pour la détermination des  $P_m$  pour  $m \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+p-n, \dots, k+p-1\}$  on utilise la relation :  $y_f^{(r)}(t) = \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{i=r}^{k+p-1} \Delta^r P_i N_i^{k-r}(t)$  où  $\Delta^r P_i = \frac{\Delta^{r-1} P_i - \Delta^{r-1} P_{i-1}}{t_i + k - r + 1 - t_{i-1}}$ . On obtient ainsi :  $y_f^{(r)}(0) = \frac{k!}{(k-r)!} \Delta^r P_r$  et  $y_f^{(r)}(T) = \frac{k!}{(k-r)!} \Delta^r P_{k+p-r}$ .

Le problème principal réside dans le choix de l'entier  $p$ . L'idée est d'arriver à estimer l'erreur a posteriori de l'approximation connaissant le degré  $k$  de la B-Spline et les valeurs de la subdivision  $\sigma$ . Mieux encore, l'intérêt d'une telle estimation doit permettre d'ajuster localement la position de ces noeuds afin de respecter une tolérance donnée et ceci sans pénaliser le temps de calcul.

#### V. ESTIMATION DE L'ERREUR D'APPROXIMATION : FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLÈME

Considérons l'équation différentielle (13) avec les conditions aux extrémités suivantes

$$Z(t) \Big|_{t=0 \text{ (resp. } t=T)} = (C(A, B) \cdot L_A)^{-1} x_i \text{ (resp. } x_f). \quad (15)$$

Si on pose  $z_n(t) = z(t) - P(t)$  où  $P(t)$  un polynôme tel que le problème (13) avec les conditions aux extrémités (15) s'écrit comme un problème de Dirichlet homogène alors la sortie plate homogène  $z(t)$  satisfait à :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \gamma_i z^{(2i)}(t) = f(t), \\ z^{(i)}(0) = z^{(i)}(T) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, n, \end{cases} \quad (16)$$

où  $f(t) = \sum_{i=0}^n \gamma_i P^{(2i)}(t)$ .

Dans la suite, nous notons par  $\Omega$  l'intervalle ouvert  $]0, T[$  et par  $H^m(\Omega) := \{z \in L^2(\Omega) ; z^{(i)} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq m\}$  l'espace de Sobolev d'ordre  $m$  où les dérivées  $z^{(i)}$  sont prises au sens des distributions. Cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(y, z)_{m,\Omega} = \sum_{0 \leq i \leq m} \int_{\Omega} y^{(i)}(x) z^{(i)}(x) dx$  et la norme associée  $\|z\|_{m,\Omega} = \sqrt{(z, z)_{m,\Omega}}$ . Nous pouvons remarquer ici que  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  et comme  $\Omega$  est un ouvert borné alors l'espace  $H^m(\Omega)$  s'identifie à l'espace de Beppo-Levi d'ordre  $m$  des fonctions de classe  $C^{m-1}$  sur  $\Omega$  et admettant une dérivée généralisée à l'ordre  $m$ . Nous pouvons alors donner un théorème d'existence et d'unicité de la solution au problème (16).

*Théorème 1:* Soit  $f \in L^2(\Omega)$  alors (16) admet une solution unique  $z$  dans  $H^{2n}(\Omega)$ . De plus, si  $f \in C^0(\Omega)$  alors  $z \in C^{2n}(\bar{\Omega})$ .

**Preuve.** Supposons qu'une solution  $z$  de (16) existe et qu'elle appartienne à  $H^{2n}(\Omega)$  alors la multiplication de (16) par une fonction test  $w \in H^n(\Omega)$ , donne :

$$\int_0^T \left( \sum_{i=0}^n \gamma_i z^{(2i)}(t) \right) w(t) dt = \int_0^T f(t) w(t) dt.$$

Soit  $H_0^n(\Omega)$  l'espace des fonctions de  $H^n(\Omega)$  nulles aux extrémités de  $\Omega$  ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n-1$ . Alors après  $n+1$  intégrations par parties, il vient :

$$\forall w \in H_0^n(\Omega), a(z, w) = F(w), \quad (17)$$

où

$$a(z, w) = \int_0^T \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma_i z^{(i)}(t) w^{(i)}(t) \right) dt, \quad (18)$$

et  $F(w) = \int_0^T f(t) w(t) dt$ . On a ainsi montré que si  $z \in H^{2n}(\Omega)$  est solution de (16), alors elle est solution de (17). La linéarité de l'intégrale implique la bilinéarité de  $a$  et la linéarité de  $F$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que la norme  $L^2$  est plus petite que la norme  $H^n$  impliquent alors que  $F$  est continue. De plus, sur  $H_0^n(\Omega)$ , il vient après application d'intégrations par parties successives que  $a(z, z) = \int_0^T Z(t)^T \alpha Z(t) dt$  où  $Z(t)^T = (z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(n)}(t))$ . Comme  $\alpha$  est symétrique réelle et définie positive alors elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles strictement positives. Soient  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  respectivement la plus petite et la plus grande de ses valeurs propres, il vient alors que

$$\sqrt{T \cdot \lambda_m} \|z\|_{2n, \Omega} \leq \left( \int_0^T Z(t)^T \alpha Z(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{T \cdot \lambda_M} \|z\|_{2n, \Omega}.$$

Ceci nous assure de la continuité et de la coercivité de  $a$ . Le lemme de Lax-Milgram (Cf. [5] [17]) permet de conclure qu'en à l'existence et l'unicité d'une solution  $z \in H_0^n(\Omega)$  de (17). Montrons maintenant que  $z$  est solution du problème (16). Les conditions aux limites sont satisfaites car  $z \in H_0^n(\Omega)$ . Comme  $D(\Omega)$ , l'espace des fonctions  $C_c^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ , est dense dans  $H_0^n(\Omega)$ , (17) équivaut à

$$\forall w \in D(\Omega), a(z, w) = F(w).$$

La sortie plate homogène  $z$  satisfait donc à  $\sum_{i=0}^n \gamma_i z^{(2i)}(t) = f(t)$  dans  $D'(\Omega)$ , espace des distributions de L. Schwartz. Comme par hypothèse  $f \in L^2(\Omega)$  et que  $z$  a au moins la régularité  $L^2(\Omega)$ , on en déduit que  $z \in H^{2n}(\Omega)$ . Si de plus  $f$  est continue sur  $\bar{\Omega}$  alors  $z$  est  $C^{2n}(\bar{\Omega})$  par application du Théorème VIII.2. de [1]. ■

Nous notons par  $V_\delta^k(\Omega)$  (avec  $k \geq 2n-1$ ) l'espace des B-Splines de degré  $k$  nulles aux extrémités de  $\Omega$  et définies sur la séquence de noeuds  $\delta$ . Nous imposons de plus sur cet espace que les dérivées des B-Splines jusqu'à l'ordre  $n-1$  soient nulles aux extrémités de  $\Omega$ . Cet espace est par définition un sous espace de  $H_0^{2n}(\Omega)$ .

**Théorème 2:** Le problème d'approximation dit de Galerkin suivant : déterminer  $y \in V_\delta^k(\Omega)$  telle que

$$\forall w \in V_\delta^k(\Omega), a(y, w) = F(w), \quad (19)$$

admet une unique solution. Soit  $e(t) = z(t) - y(t)$  la fonction erreur alors

$$\|e\|_{0, \Omega} \leq \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \inf_{w \in V_\delta^k(\Omega)} \|z - w\|_{0, \Omega}. \quad (20)$$

**Preuve.** La première partie correspond au problème de Galerkin dans le cas de l'approximation par B-Splines de la solution de (17).

L'inégalité se démontre comme suit. En effectuant la différence de (19) et de (17), il vient que

$$\forall w \in V_\delta^k(\Omega), a(e, w) = 0.$$

Soit  $R(y)(t) = f(t) - \sum_{i=0}^n \gamma_i y^{(2i)}(t)$  le résidu de (16) alors

$$\forall w \in V_\delta^k(\Omega), \int_0^T R(y)(t) w(t) dt = a(e, w) = 0. \quad (21)$$

Comme  $\forall w \in V_\delta^k(\Omega)$ ,  $a(z - y, z - y) = a(z - y, z - w)$  alors  $\|e\|^2 T \lambda_m \leq a(z - y, z - y) \leq T \lambda_M \|e\| \|z - w\|$  et donc  $\forall w \in V_\delta^k(\Omega)$ ,  $\|e\| \leq \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|z - w\|$ . On retrouve alors le résultat classique dit inégalité de Céa. ■

Le lemme suivant donne une estimation de l'erreur d'interpolation d'un polynôme interpolant une fonction de  $z \in H_0^{2n}(\Omega)$  sur un intervalle fermé quelconque  $[a, b]$  de  $\Omega$ . Cet interpolant, en général différent de celui obtenu par la méthode de Galerkin, nous permettra de donner par la suite une majoration puis une estimation a posteriori de l'erreur de l'interpolant de Galerkin du théorème précédent.

**Lemme 1:** Soit  $z \in H^{2n}(\Omega)$  alors l'interpolant polynomial  $\Pi z \in \mathcal{P}_{2n-1}([a, b])$  (espace des polynômes de degré  $\leq 2n-1$  sur  $[a, b] \subset \Omega$ ) vérifiant pour tout  $j = 0, \dots, n-1$  :

$$\Pi z^{(j)}(a) = z^{(j)}(a), \quad \Pi z^{(j)}(b) = z^{(j)}(b),$$

satisfait à :

$$\|z - \Pi z\|_{0, [a, b]} \leq \frac{1}{2^{2n-2} (2n-2)!} \|z^{(2n)}\|_{0, [a, b]} (b-a)^{2n-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Si de plus,  $z \in C^{2n}(\Omega)$  alors

$$\sup_{t \in [a, b]} |z(t) - \Pi z(t)| \leq \frac{1}{2^{2n-2} (2n-2)!} \sup_{t \in [a, b]} |z^{(2n)}(t)| (b-a)^{2n-1}.$$

**Preuve.** Soit  $e(t) = z(t) - \Pi z(t)$  alors  $e^{(j)}(a) = e^{(j)}(b) = 0$  pour  $j = 0, \dots, n-1$ . Par applications successives du théorème de Rolle aux fonctions  $e, e', \dots, e^{(2n-2)}$  on montre qu'il existe  $\eta \in ]a, b[$  tel que  $e^{(2n-1)}(\eta) = 0$ . Soient  $x \in ]a, b[$  et

$$\psi_x : t \in [a, b] \mapsto \psi_x(t) = e'(t) - \left( \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)} \right)^{n-1} e'(x)$$

une fonction auxiliaire. Alors  $\psi_x$  vérifie  $\psi_x(x) = 0$  et pour tout  $j = 0, \dots, n-2$   $\psi_x^{(j)}(a) = \psi_x^{(j)}(b) = 0$ , où la dérivée est prise par rapport à la variable  $t$ . En appliquant de nouveau le théorème de Rolle à  $\psi_x, \dots, \psi_x^{(2n-3)}$ , on montre qu'il existe  $\mu \in ]a, b[$  tel que

$$\psi_x^{(2n-2)}(\mu) = e^{(2n-1)}(\mu) - \frac{(2n-2)!}{((x-a)(x-b))^{n-1}} e'(x) = 0.$$

Par conséquent  $e'(x) = \frac{((x-a)(x-b))^{n-1}}{(2n-2)!} e^{(2n-1)}(\mu)$ .

Comme  $((x-a)(x-b))^{n-1}$  est maximum en  $x = \frac{a+b}{2}$ , il

vient en prolongeant par continuité en  $x = a$  et  $b$  l'inégalité suivante que pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$|e'(x)| \leq \frac{1}{(2n-2)!} \left( \frac{b-a}{2} \right)^{2n-2} |e^{(2n-1)}(\mu)|. \quad (23)$$

Comme  $e^{(2n-1)}(\eta) = 0$  et que  $\Pi z$  est un polynôme de degré  $\leq 2n-1$ , il vient :  $e^{(2n-1)}(\mu) = \int_{\eta}^{\mu} z^{(2n)}(t) dt$ . Par définition  $z^{(2n)} \in L^2(\Omega)$ , donc par Cauchy-Schwarz il vient :

$$|e'(x)| \leq \frac{1}{(2n-2)!} \left( \frac{b-a}{2} \right)^{2n-2} \|z^{(2n)}\|_{0,[a,b]}.$$

Comme  $\int_a^t |e'(x)| dx \geq \left| \int_a^t e'(x) dx \right| = |e(t)|$  il vient pour tout  $t \in [a, b]$  que :

$$|e(t)| \leq \frac{1}{2^{2n-2} (2n-2)!} (b-a)^{2n-1} \|z^{(2n)}\|_{0,[a,b]}.$$

D'où après intégration de l'erreur, le deuxième terme étant considéré comme constant, on obtient la majoration (22). La deuxième inégalité se démontre à partir de (23) où l'on prendra le sup de  $|e^{(2n-1)}(\mu)|$ . ■

Comme on peut le constater l'erreur dépend encore de la solution  $z$ . Nous allons montrer maintenant que le problème dual à (16) va nous permettre de donner une estimation a posteriori cette fois-ci de l'erreur d'approximation. Pour cela, nous notons par  $A : H_0^{2n}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  l'opérateur qui à  $z \in H_0^{2n}(\Omega)$  associe la fonction de  $L^2(\Omega)$  définie par  $\sum_{i=0}^n \gamma_i z^{(2i)}(t)$ .

**Théorème 3:** Soit  $y \in V_{\delta}^k(\Omega)$  la solution de (19) alors l'erreur d'approximation de la sortie plate vérifie l'estimation a posteriori :

$$\|e\|_{0,\Omega} \leq \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \frac{S_c}{2^{2n-2} (2n-2)!} h^{2n-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{p-1} \|R(y)\|_{0,[x_i, x_{i+1}]}, \quad (24)$$

où  $S_c$  est une constante de stabilité caractérisant la sensibilité de la solution due à la discrétisation  $\delta$ .

**Preuve.** Considérons le problème dual de (16) i.e. déterminer  $\varphi \in H_0^{2n}(\Omega)$  tel que

$$A^* \varphi = e, \quad (25)$$

où  $A^*$  est l'opérateur adjoint de  $A$ . La norme de l'erreur s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\Omega}^2 &= (e, e)_{0,\Omega} = (e, A^* \varphi)_{0,\Omega}, \\ &= (f - Ay, \varphi)_{0,\Omega} = -(R(y), \varphi)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

D'après (21), il vient :

$$\forall w \in V_{\delta}^k(\Omega), \quad -(R(y), w)_{0,\Omega} = 0.$$

Soit  $\varphi_{\delta}^k \in V_{\delta}^k(\Omega)$  la solution de Galerkin de (25) alors

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\Omega}^2 &= -(R(y), \varphi)_{0,\Omega} + (R(y), \varphi_{\delta}^k)_{0,\Omega}, \\ \|e\|_{0,\Omega}^2 &= (R(y), \varphi_{\delta}^k - \varphi)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, nous obtenons la majoration de l'erreur suivante :

$$\|e\|_{0,\Omega}^2 \leq \|R(y)\|_{0,\Omega} \|\varphi_{\delta}^k - \varphi\|_{0,\Omega}.$$

La majoration de l'erreur de l'interpolant par morceaux de  $\varphi$  du lemme précédent nous permet de majorer l'erreur de l'approximation du problème de Galerkin dual et d'écrire via l'inégalité (20) appliquée au dual que :

$$\|e\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \frac{h^{2n-\frac{1}{2}}}{2^{2n-2} (2n-2)!} \sum_{i=0}^{p-1} \|R(y)\|_{0,[x_i, x_{i+1}]} \|\varphi^{(2n)}\|_{0,[x_i, x_{i+1}]},$$

où  $h = \max_{i \in \{0, \dots, p-1\}} |x_{i+1} - x_i|$ . Considérons la constante de stabilité définie par :

$$S_c := \sup_{e \in L^2(\Omega)} \frac{\|\varphi^{(2n)}\|_{0,\Omega}}{\|e\|_{0,\Omega}},$$

qui mesure la sensibilité de la solution à la discrétisation du problème, alors la majoration  $\|\varphi^{(2n)}\|_{[x_i, x_{i+1}], \Omega} \leq S_c \|e\|_{0,\Omega}$  pour  $i = 0, \dots, p-1$  nous permet de conclure. ■

Etant donné une tolérance fixée, noté  $\varepsilon$ , concernant l'erreur d'approximation de la sortie plate, il suffit alors de choisir  $h$  (et donc  $p$ ) tel que :

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \frac{S_c}{2^{2n-2} (2n-2)!} h^{2n-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{p-1} \|R(y)\|_{0,[x_i, x_{i+1}]} = \varepsilon.$$

Dans la pratique, il est nécessaire d'estimer la constante  $S_c$ . Cette estimation est réalisée en résolvant le problème dual où l'on remplacera l'erreur  $e$  par une approximation obtenue par soustraction de deux solutions approchées, calculées sur deux subdivisions différentes.

Concernant le calcul de  $\|R(y)\|_{0,[x_i, x_{i+1}]}$  on pourra sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}[$  de  $\sigma$  pour  $0 \leq i \leq p-1$  écrire l'approximation B-Spline  $y(t)$  comme une courbe de Bézier

$B_i(t) = \sum_{j=0}^{j=k} B_j^k \left( \frac{t-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right) Q_j$ . Ceci est rendu possible en insérant par exemple  $k-1$  noeuds en  $x_i$  et en  $x_{i+1}$ . On exprime alors la fonction  $\sum_{r=0}^n \gamma_r \frac{d^{2r}y}{dt^{2r}}(t)$  dans la base de Bernstein en utilisant pour chaque dérivée une méthode d'élévation de la longueur. La formule de Wang (Cf. [11]) nous indique alors que  $\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}[} |R(y(t))|$  est majoré par  $E_i = \frac{(x_{i+1}-x_i)^2 k(k-1)}{8} \max_{0 \leq l \leq k-2} \left| \sum_{r=0}^{r=n} \gamma_r (Q_{l+2}^{(r)} - 2Q_{l+1}^{(r)} + Q_l^{(r)}) \right|$  qui se calcul très facilement.

## VI. EXEMPLE

Considérons un "petit train" (système masse + ressort + amortissement) donné à la figure 1.

Le modèle se met sous la forme (5) avec  $x$  contenant les positions et vitesses de la locomotive et des wagons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & & & & \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{k_1-k_2}{m_2} & -\frac{c_1-c_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{k_4}{m_5} & \frac{c_4}{m_5} & -\frac{k_4}{m_5} & -\frac{c_4}{m_5} \end{pmatrix}$$

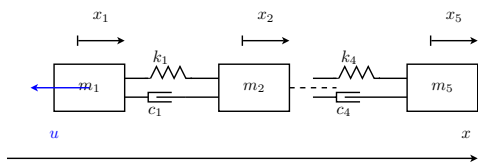


Fig. 1. Locomotive + wagons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

Nous choisissons pour  $Q$  la matrice identité et  $R = 1$  (Pour les conditions terminales cf. figures suivantes). La solution numérique utilisant les sorties plates combinée à la recherche de racines d'un polynôme conduit à un problème mal conditionné alors que la résolution du problème de Dirichlet (Riccati Différentiel) est lourde à mettre en place (utilisation de méthode de tir, etc ...) : ici seul la solution utilisant des B-splines donne des résultats concluant en un temps de calcul tout à fait acceptable (environ 2s comparé à quelques minutes pour la résolution de l'équation de Riccati différentielle).

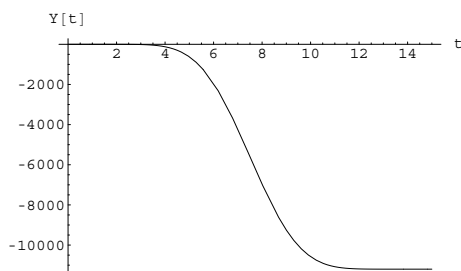


Fig. 2. Sortie plate

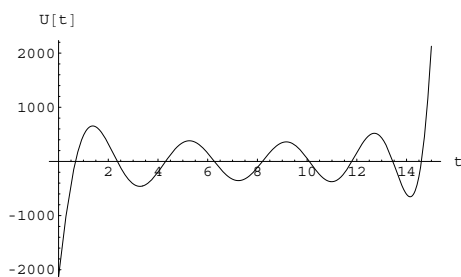


Fig. 3. Commande

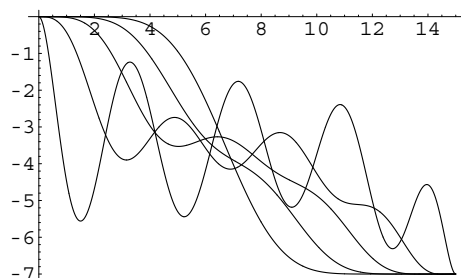


Fig. 4. Etats

## VII. CONCLUSION

Cet article permet de mettre en évidence l'équivalence entre trois problèmes (pour des systèmes linéaires commandables) :

- la résolution d'une équation de Riccati,
- l'interpolation par des B-splines d'une solution plate,
- la résolution d'un problème de Dirichlet.

Du point de vue numérique, il est ici montré comment obtenir une estimation a posteriori de l'erreur d'approximation par des B-Splines de solutions optimales pour des problèmes LQ. Le fait que ces fonctions soient à support compact permet dans de nombreux calculs de simplifier ces derniers. Une première généralisation concerne le cas multi-entrées. Une seconde généralisation concerne les problèmes LQ avec contraintes linéaires et enfin une dernière concerne l'extension au cas non linéaire pour lequel des techniques similaires peuvent être développées. Les principales difficultés sont d'ordre technique puisque les majorations ne peuvent pas se faire de façon aussi fine : une solution consisterait à faire des approximations linéaires.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [2] Emmanuel Delaleau Veit Hagenmeyer, Andrea Ranftl. Flatness-based control of the induction drive minimising energy dissipation. in *Proc. 4th NCN Workshop "Nonlinear and Adaptive Control"*, A. Zinober and D. Owens, Springer London, 2001.
- [3] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [4] K. Eriksson and al., « Introduction to Adaptive Methods for Differential Equations » *Acta Numerica*, pp. 105-158, 1996.
- [5] A. Ern, J.L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [6] B. Francis, *A course in  $H_\infty$  control theory*. Springer-Verlag, 1987.
- [7] M. Fliess, J.Lévine, Ph.Martin, et P.Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sci. Paris*, I-315 :619-624, 1992.
- [8] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin and P. Rouchon, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples » *Int. J. Control*, vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.
- [9] M. Fliess, J.Lévine, Ph.Martin, et P.Rouchon. A lie- bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans Automatic Control*, 44 :922-937, 1999.
- [10] Michel Fliess et Richard Marquez. Continuous-time linear predictive control and flatness : a module-theoretic setting with examples. *International Journal of Control*, 73(7) :606, 2000.
- [11] R. Goldman. *Pyramid Algorithms*. Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
- [12] Bálint Kiss. *Planification de trajectoires et commande d'une classe de systèmes mécaniques plats et liouvilliens*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2001.
- [13] N. Leroy, A. Kökösy, W. Perruquetti. Commande robuste d'un système mis sous forme plate. à paraître CIFA 06.
- [14] F.L. Lewis and V.L. Syrmos. *Optimal Control*. Wiley, New York, 1995.
- [15] Ph. Martin B. Laroche et P. Rouchon. Motion planing for the heat equation. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10 :629-643, 2000.
- [16] M. B. Milam N. Petit et R. M. Murray. A new computational method for optimal control of a class of constrained systems governed by partial differential equations. in *Proc. of the 2002 IFAC World Congres*, 2002.
- [17] S. Nicaise. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 2000.
- [18] N. Petit M. B. Milam et R. M. Murray. Constrained trajectory generation for micro-satellite formation flying. in *Proc. 2001 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2001.
- [19] Ch. Talbot T. Neckel et N. Petit. Collocation and inversion for a reentry optimal control problem. in *Proc. of the 5th Intern. Conference on Launcher Technology*, 2003.