



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/9812>

To cite this version :

Raphaël MOULART, René ROTINAT - Calcul des cartes de déformations par une méthode de moindres carrés pénalisés - In: Congrès Français de Mécanique (CFM 2015), France, 2015 - CFM 2015 - 2015

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



Calcul des cartes de déformations par une méthode de moindres carrés pénalisés

R. MOULART^a, R. ROTINAT^b

a. Laboratoire « MSMP » (Mechanics Surfaces and Materials Processing) – Arts et Métiers ParisTech
– Rue Saint Dominique BP 508 – 51006 Châlons-en-Champagne – FRANCE -

Raphael.Moulart@ensam.eu

b. Laboratoire « MSMP » (Mechanics Surfaces and Materials Processing) Arts et Métiers ParisTech –
Rue Saint Dominique BP 508 – 51006 Châlons-en-Champagne – FRANCE - Rene.Rotinat@ensam.eu

Résumé : (16 gras)

Ce travail propose d'étudier une procédure alternative pour lisser puis dériver des mesures de champs de déplacement expérimentaux pour obtenir des champs de déformations. Celle-ci, la méthode des moindres carrés pénalisés, repose sur le calcul d'un compromis entre la fidélité aux données brutes et la nature lisse des données reconstruites. Pour caractériser ses performances, une étude comparative entre cet algorithme et deux autres stratégies couramment mises en œuvre (l'« approximation diffuse » et le filtre Savitzky-Golay) est réalisée. Les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés pénalisés sont comparables en termes de qualité de la reconstruction à ceux produits par les deux autres algorithmes, tandis que la technique proposée est la plus rapide et que son temps de calcul est totalement indépendant du taux de lissage demandé. En outre, contrairement à deux autres méthodes, il est possible avec cette technique d'effectuer une dérivation numérique pour obtenir les déformations avant de lisser ces dernières (tandis que le lissage est normalement appliqué aux cartes de déplacement avant la différenciation) ce qui peut conduire dans certains cas à une reconstruction plus efficace des champs de déformations.

Abstract : (16 gras)

This work proposes an alternative procedure to smooth and differentiate experimental full-field displacement measurements to get strain fields. This one, the penalized least squares method, relies on the balance between the fidelity to original raw data and the smoothness of the reconstructed ones. To characterize its performance, a comparative study between this algorithm and two other commonly implemented strategies (the 'diffuse approximation' and the Savitzky-Golay filter) is achieved. The results obtained by the penalized least squares method are comparable in terms of quality of the reconstruction to those produced by the two other algorithms, while the proposed technique is the fastest as its computation time is totally independent from the asked amount of smoothing. Moreover, unlike both other considered methods, it is possible with this technique to perform the derivation to obtain strain maps before smoothing them (while the smoothing is normally applied to displacement maps before the differentiation) which can lead in some cases to a more effective reconstruction of the strain fields.

Mots clefs : Cartes de champs cinématiques ; algorithmes de lissage ; différentiation numérique ; moindres carrés pénalisés

1 Introduction

La plupart des méthodes de mesure de champs cinématiques (tels que la corrélation d'image numérique, l'interférométrie de speckle, la méthode de grille,...) fournissent des cartes de déplacements alors que, pour le mécanicien des solides, l'information utile est la plupart du temps contenue dans les champs de déformations (pour l'identification des propriétés mécaniques par exemple). Par conséquent, les données doivent souvent être dérivées numériquement. Cependant, une différentiation numérique amplifie considérablement le niveau de bruit qui affecte un signal. Une étape intermédiaire de lissage est donc nécessaire avant de procéder à la dérivation numérique.

Seules quelques techniques de lissage sont actuellement utilisées par la communauté « mécanique expérimentale » [1] :

- Le filtrage de données par un noyau de convolution [2]. Cette technique offre une approche rapide, mais ne reconstruit pas efficacement les données aux bords du domaine.
- Des techniques de régression globale (sur une base de fonction polynomiale 2D par exemple) [3]. Cette approche peut être efficace pour les signaux de faibles fréquences spatiales mais peut induire des artefacts de reconstruction sur les bords et des oscillations parasites dans le champ reconstruit lorsque le nombre de paramètres de la fonction augmente (degré du polynôme par exemple).
- Une régression globale basée sur une approche de type « éléments-finis » [4].
- Une régression polynomiale locale utilisant un algorithme de moindres carrés avec pondération, approche dite d'« approximation diffuse » [4]. Cette technique fournit des résultats très satisfaisants (et est efficace pour reconstruire les données aux bords) mais peut être très coûteuse en temps de calcul lorsque la taille de la fenêtre sur laquelle est pratiquée la régression augmente.

Une rapide revue bibliographique dans la littérature des domaines « statistiques » et « analyse des données » montre que plusieurs solutions alternatives existent [5, 6]. Cet article vise à adapter l'une de ces techniques pour le traitement des cartes des mesures de champs cinématiques et d'évaluer ses performances par rapport à deux autres méthodes : l'« approximation diffuse » (appelée AD dans la suite du document) et le filtrage Savitzky-Golay (appelée SG dans la suite du document). Si SG n'est généralement pas utilisé dans le traitement cartes des mesures de champs cinématiques, c'est une technique de lissage très populaire car il combine la rapidité du lissage par noyau de convolution avec une approche locale basée sur les polynômes comme dans AD. En outre, on peut calculer directement les dérivées d'un ensemble de données bruitées par un choix adapté des coefficients du noyau [7].

Après avoir rappelé le principe de l'algorithme choisi, les moindres carrés pénalisés (appelée MCP dans la suite du document), la technique est appliquée à plusieurs cas (une fonction analytique 2D à laquelle on a ajouté du bruit, des cartes de déplacement simulées par éléments finis et des cartes de déplacements expérimentales) et ses performances sont comparées à celles des deux autres algorithmes. Une dernière section conclut le papier et donne quelques perspectives pour la méthode choisie qui pourrait facilement être étendue pour répondre aux nouvelles exigences induites par l'évolution actuelle de mesures de champs cinématiques (en particulier, les mesures tomographiques 3D qui deviennent de plus en plus populaires).

2 L'algorithme de moindres carrés pénalisés

La méthode des moindres carrés pénalisés n'est pas nouvelle. Elle remonte à environ un siècle [8, 9]. Une formulation moderne des MCP peut être trouvée dans [10, 11].

L'idée de base de la méthode est de minimiser une quantité exprimant l'équilibre entre la déviation des données reconstruites par rapport aux données brutes (bruitées donc) et la « rugosité » des données reconstruites. Pour illustrer cette optimisation, considérons un ensemble de n observations 1D y_i faites sur abscisses équidistantes. Les valeurs reconstruites z_i doivent minimiser la quantité Q exprimé dans l'équation 1 :

$$Q = \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}_{\text{Déviation}} + \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n-d} (\Delta^d z_i)^2}_{\text{Rugosité}}. \quad (1)$$

Dans cette équation, le terme $\Delta^d z_i$ est la différence d'ordre d des valeurs de z_i . Ainsi, le terme de déviation est le carré de la norme des résidus et le terme de rugosité, le carré de la norme de la différence d'ordre d des valeurs reconstruites. Le terme λ est le paramètre de lissage qui donne un poids relatif au terme de rugosité dans la fonctionnelle à minimiser Q : plus la valeur de λ est élevée, plus le lissage des données sera important.

La minimisation de Q possède une solution analytique. En adoptant un formalisme matriciel, le vecteur des valeurs reconstruites $\{z\}$ vaut :

$$\{z\} = ([I] + \lambda [D_d]^T [D_d])^{-1} \{y\}, \quad (2)$$

où $\{.\}$ désigne un vecteur de colonne, $[.]$, une matrice ; $[I]$ est la matrice identité $n \times n$ et $[D^d]$, la matrice telle que $[D^d] \cdot \{z\}$ est la différence d'ordre d des valeurs de z_i .

Cette méthode conduisant à une solution analytique, elle est très rapide par rapport à d'autres techniques.

Pour s'adapter aux exigences du traitement des cartes de déplacements, l'algorithme doit pouvoir faire face à des valeurs manquantes (ce qui se produit lorsque les régions d'intérêt ne sont pas de forme rectangulaire ou lorsque les échantillons présentent des trous). Ces valeurs manquantes se traduisent par des valeurs « NaN » dans Matlab[®] ou logiciel équivalent d'analyse numérique. Pour faire face à ces NaNs, une version de l'algorithme avec pondération peut être mise en place. Chaque terme de résidu est affecté par un poids w_i égal à 1 pour les points valides et à 0 pour les points rejetés. Cela conduit aux données reconstruites définies par l'équation 3 :

$$\{z\} = ([W] + \lambda [D_d]^T [D_d])^{-1} [W] \{y\}, \quad (3)$$

où $[W]$ est une matrice diagonale contenant les valeurs w_i .

Pour traiter les données 2D, une solution consiste à faire apparaître une transformée en cosinus discrète. Pour cela, la matrice $[D_d]$ doit être légèrement modifiée. Ici, un opérateur de différenciation du deuxième ordre est considéré. On lui ajoute deux lignes supplémentaires au début et à la fin correspondant à des conditions limites de réflexion. $[D_2]$ est maintenant une matrice carrée et peut être décomposé en valeurs propres ce qui conduit à :

$$\{z\} = [U] \left([I] + \lambda [\Omega]^2 \right)^{-1} [U]^T \{y\} = [U] [\Gamma] [U]^T \{y\}. \quad (4)$$

Les multiplications par $[U]$ et par $[U]^T$ correspondent respectivement à l'application d'une transformée en cosinus discrète (TCD) et transformée en cosinus discrète inverse (TCDI) [11, 12]. L'équation 4 devient alors :

$$\{z\} = [U] [\Gamma] [U]^T \{y\} = \text{TCDI}([\Gamma] \text{TCD}(\{y\})). \quad (5)$$

En raison des propriétés de la transformée en cosinus discrète, le même type d'approche peut être appliquée à des données 2D équidistantes. Pour une grille régulière de valeurs 2D, l'équation 5 devient :

$$[z] = \text{TCDI2} \left([\Gamma^{II}] \circ \text{TCD2}([y]) \right), \quad (6)$$

avec TCD2 et TCDI2 désignant respectivement la transformée en cosinus discrète 2D et transformée en cosinus discrète inverse, \circ , le produit matriciel de Hadamard (produit terme à terme) et $[\Gamma^{II}]$ une matrice carrée dépendant de λ et des valeurs propres de l'équivalent 2D de $[D_2]$.

3 Lissage des cartes de déplacement : évaluation des performances

3.1 Lissage d'une fonction 2D analytique bruitée

Les performances de l'algorithme choisi ont tout d'abord été évaluées sur une fonction analytique bruitée. L'avantage d'utiliser une fonction analytique est d'avoir accès à des dérivées analytiques et de comparer les valeurs reconstruites aux valeurs réelles en s'affranchissant de toute source d'erreur.

La fonction choisie est la fonction « peaks » de Matlab[®]. Ici, une matrice (1000 × 1000) a été générée. Un bruit gaussien avec une moyenne nulle et un écart type de 1 a été ajouté à la cartographie ce qui mène à l'équivalent d'une carte de déplacement bruitée haute résolution (à la fois en termes de localisations spatiales et de rapport signal sur bruit). La figure 1 montre des représentations de la fonction, de sa version bruitée et de sa dérivée par rapport à x .

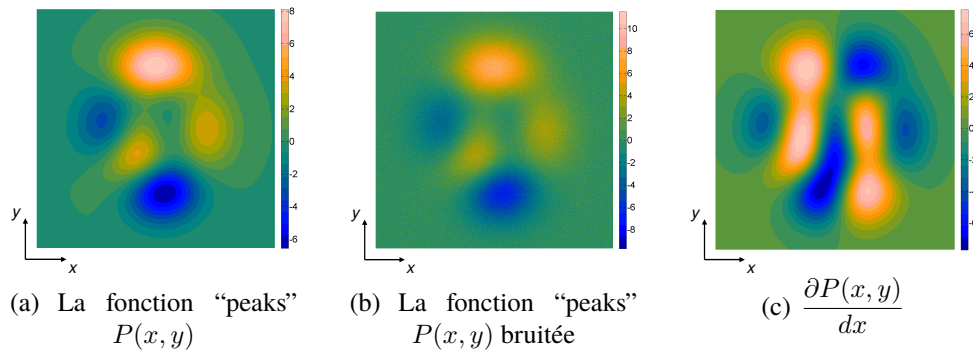


FIGURE 1 – La fonction “peaks”, sa version bruitée et sa dérivée par rapport à x .

Tout d'abord, le temps de calcul pour (re-)construire les dérivées a été examiné. Le calcul a été effectué en utilisant Matlab[®] sur un ordinateur 64 bits équipé d'un processeur Intel[®] Core™ i7-2760QM (2.4

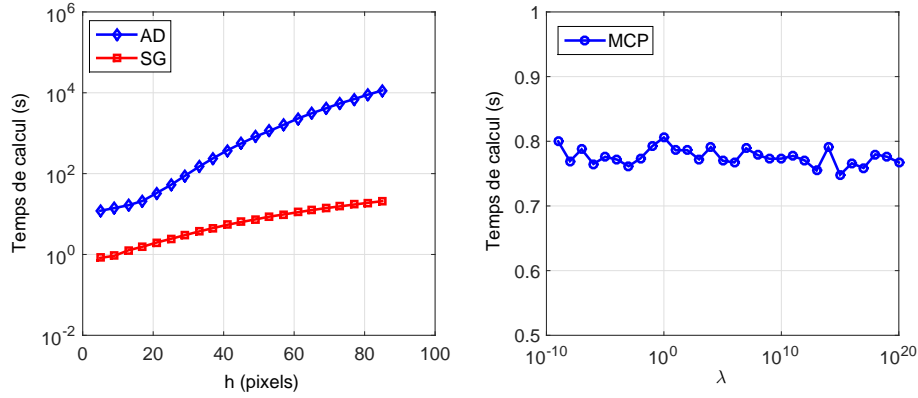


FIGURE 2 – Temps de calcul en fonction des paramètres de lissage pour les algorithmes AD, SG, MCP.

GHz) et d'une RAM DDR3 1333 MHz de 8 Go. Le temps de calcul en fonction des paramètres de lissage pour les algorithmes AD, SG et MCP sont tracés figure 2.

On peut voir que :

- Pour AD et SG, le temps de calcul est fortement dépendant de taille de la fenêtre (h) sur laquelle la reconstruction est effectuée : plus h est grand, plus le temps de calcul est long ;
- si le temps de calcul reste raisonnable pour SG (inférieur à une demi-minute pour $h = 85$ pixels), il devient très grand pour AD (environ 6 heures pour $h = 85$ pixels) ce qui peut rendre cet algorithme réductible ;
- le temps de calcul est très faible (environ 0,8 secondes) et indépendant du paramètre de lissage λ pour MCP.

Aux vues de ces résultats, il est clair que MCP est beaucoup plus rapide que AD ou SG ce qui le rend très compétitif.

Dans un deuxième temps, la précision de la reconstruction a été étudiée. Pour cela, une approche similaire à celle développée dans [4] a été mise en place. Le critère pour qualifier la reconstruction est l'écart moyen entre les dérivées reconstruites et les dérivées exactes défini par :

$$d_{\partial P} = \left\langle \sqrt{\left(\frac{\partial P^{\text{rec.}}}{\partial x} - \frac{\partial P^{\text{exact}}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P^{\text{rec.}}}{\partial y} - \frac{\partial P^{\text{exact}}}{\partial y} \right)^2} \right\rangle, \quad (7)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne une moyenne spatiale des données sur toute la cartographie (P représente les valeurs de la fonction « peaks »).

Les résultats optimaux, conduisant à la plus faible valeur de $d_{\partial P}$ pour chaque méthode, sont indiqués dans la table 1.

TABLE 1 – Performance des différents algorithmes avec des paramètres de lissage optimaux pour une fonction analytique bruitée.

Algorithme	AD	SG	MCP	MCP sur dérivées brutes
Para. de lissage	$h = 105$ pixels	$h = 87$ pixels	$\lambda = 1,26 \cdot 10^5$	$\lambda (\partial Z / \partial x) = 1,58 \cdot 10^5$ $\lambda (\partial Z / \partial y) = 1,26 \cdot 10^5$
$d_{\partial P}$	0,22	0,23	0,12	0,20

On peut voir que, pour une valeur optimale du paramètre de lissage, MCP conduit à une valeur inférieure

de cet écart moyen que AD et SG (0,12 pour MCP contre 0,22 pour AD et 0,23 pour SG). Il est à noter que l'algorithme de lissage MCP peut également être appliqué après une dérivation numérique point-à-point de la carte bruitée brute ce qui conduit à une performance satisfaisante (chose pratiquement impossible avec les autres méthodes).

3.2 Lissage de cartes bruitées issues d'une simulation par éléments finis

L'algorithme a ensuite été testé sur des données simulées. Pour cela, un modèle éléments finis a été utilisé. La modélisation correspond à un essai de traction sur une éprouvette entaillée telle que celles utilisées dans [13] (Fig. 3(a))

Le modèle éléments finis est composé d'éléments triangulaires linéaires standards à trois noeuds en contraintes planes avec un matériau isotrope. L'échantillon a été maillé tel que les champs de déplacement puissent être raisonnablement considérés comme exacts. Pour générer des cartes de déplacement synthétiques, les champs ont été évalués sur une grille régulière de 240×160 pixels en interpolant linéairement les déplacements nodaux de telle sorte que l'espacement des données soit égale à 0,1 mm (ce qui est généralement le pas le plus fin des résultats pouvant être obtenu à partir de mesures optiques en lumière blanche). Un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type 10^{-8} (en $m = 10 \text{ nm}$) a été ajouté aux cartes de déplacements (conduisant à des cartes de déplacements bruitées typiques en termes de rapport signal sur bruit). Ces cartes sont représentées figure 3(b).

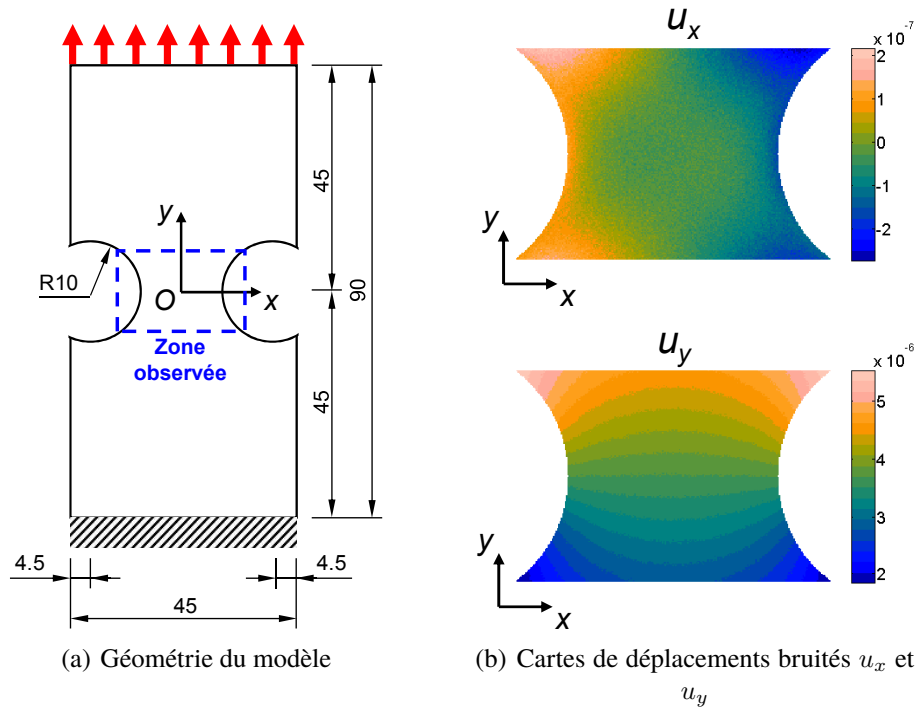


FIGURE 3 – Cartes cinématiques bruitées générées par une simulation par éléments finis.

La qualité de la reconstruction a été étudiée en utilisant le même type de critère que précédemment et comme dans [4] :

$$d_\varepsilon = \left\langle \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{\text{rec.}} - \varepsilon_{xx}^{\text{exact}})^2 + 2(\varepsilon_{xy}^{\text{rec.}} - \varepsilon_{xy}^{\text{exact}})^2 + (\varepsilon_{yy}^{\text{rec.}} - \varepsilon_{yy}^{\text{exact}})^2} \right\rangle. \quad (8)$$

Les résultats obtenus sont résumés dans la table 2 et les cartes de déformations reconstruites $\varepsilon_{xx}^{\text{rec.}}$ ainsi que les cartes d'erreur correspondantes ($\varepsilon_{xx}^{\text{rec.}} - \varepsilon_{xx}^{\text{exactes}}$) sont représentés figure 4

TABLE 2 – Performance des différents algorithmes avec des paramètres de lissage optimaux pour des résultats simulés bruités.

Algorithme	AD	SG	MCP	MCP sur dérivées brutes
Para. de lissage	$h = 37$ pixels	$h = 31$ pixels	$\lambda(u_x) = 355$ $\lambda(u_y) = 90$	$\lambda(\varepsilon_{xx}) = 1000$ $\lambda(\varepsilon_{yy}) = 1000$ $\lambda(\varepsilon_{xy}) = 500$
d_ε	$1,47 \cdot 10^{-6}$	$2,03 \cdot 10^{-6}$	$1,64 \cdot 10^{-5}$	$2,13 \cdot 10^{-6}$

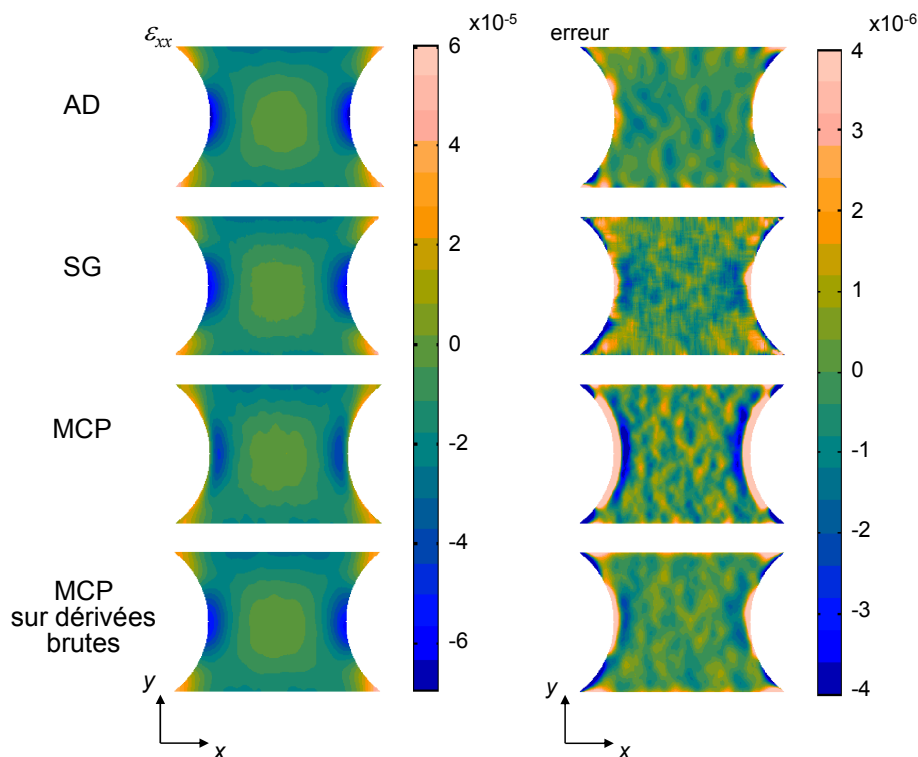


FIGURE 4 – Cartes des déformations ε_{xx} et cartes d'erreurs correspondantes pour les différentes méthodes de lissage.

On observe que MCP fonctionne moins bien que AD ou SG. En effet, l'écart moyen obtenu dans ces conditions est un ordre de grandeur au-dessus de ceux obtenus pour les deux autres algorithmes. Cela tempère les conclusions faites à la section précédente concernant les meilleures performances de MCP. Il semble en particulier que MCP ne parvienne pas à reconstruire correctement les bords des encoches circulaires, où l'écart absolu par rapport à la valeur exacte de ε_{xx} est maximal (fig. 4).

Toutefois, lorsque MCP est appliqué directement sur les dérivées (comme il a été fait précédemment pour la fonction analytique bruitée), la reconstruction fonctionne plus efficacement. En effet, pour une valeur optimale de λ , l'écart moyen est du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec les deux autres algorithmes.

En conclusion, on peut dire que, si MCP n'est pas le meilleur choix pour résoudre ce problème (peut-être à cause des gradients plus élevés qui se trouvent sur les bords des cartes, ce qui n'était pas le cas précédemment avec la fonction analytique), il montre des résultats comparables à ceux de AD ou SG lorsque la dérivation est pratiquée avant le lissage et demeure de loin la méthode la plus rapide.

3.3 Lissage de cartes de déplacement expérimentales

En dernier lieu, la procédure de lissage a été testée sur des cartes de déplacements expérimentales. L'essai de traction sur éprouvette entaillée examiné précédemment a été étudié. Les cartes de déplacement ont été obtenues par la méthode de grille [14]. La grille utilisée présentait un pas de $100\ \mu\text{m}$, aboutissant à des cartes de déplacements de 159×231 pixels. Les champs de déplacements bruts ont été traités par les différents algorithmes, conduisant aux cartes de déformations représentées figure 5.

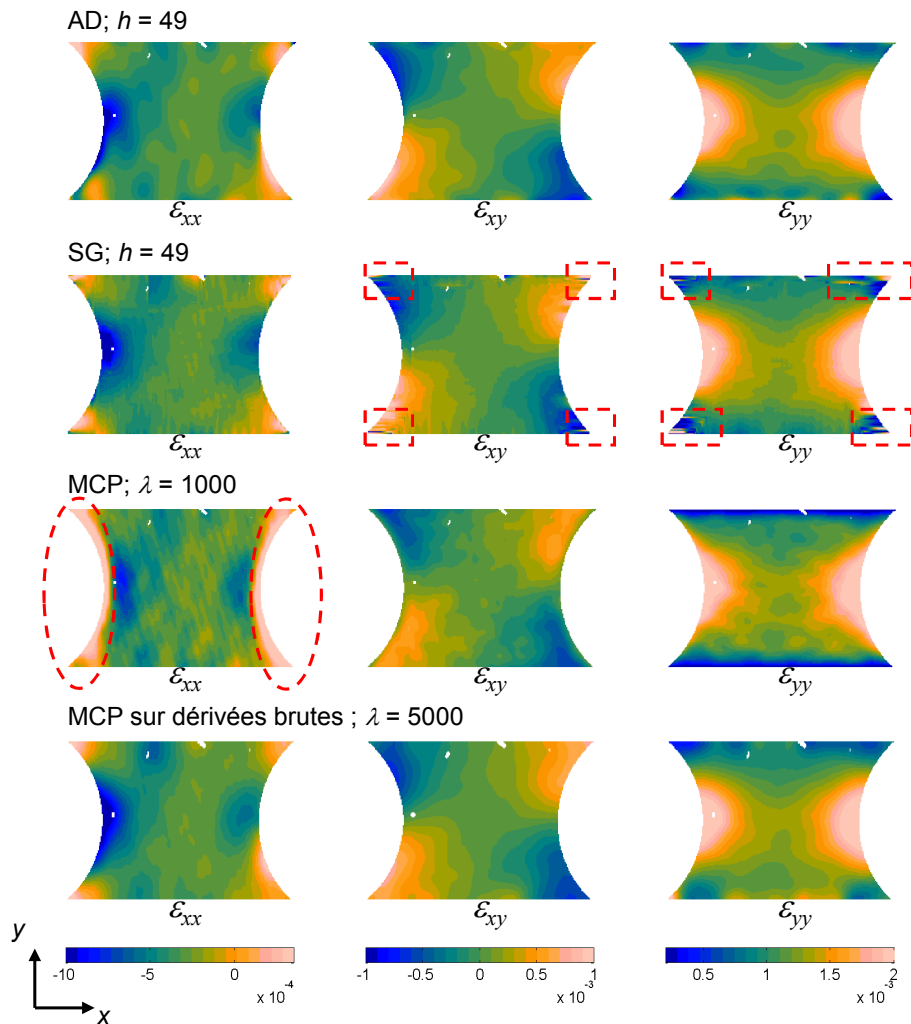


FIGURE 5 – Cartes de déformations expérimentales obtenues à l'aide des différentes procédures de lissage pour l'éprouvette entaillée sollicitée en traction (taille de la région d'intérêt : $16 \times 23\ \text{mm}^2$).

Sur cette figure, on voit nettement que AD et MCP appliqué sur les cartes de déformations « brutes » conduisent à des résultats pertinents qui peuvent être comparés à ceux obtenus précédemment sur les données simulées (même si les résultats expérimentaux montrent une asymétrie entre les côtés gauche et droit dû sans doute à des défauts d'alignement entre l'axe de l'échantillon et celui de la machine de traction). En revanche, SG et MCP appliqué avant de dériver des cartes de déplacements ne conduisent pas à des résultats probants. Les cartes issues de SG montrent un effet de tramage probablement dû à l'influence importante des bords (zones entourées par des rectangles en pointillés sur la Fig. 5). Pour la même raison, MCP appliqué avant de dériver des cartes de déplacement ne fournit pas de bons résultats. C'est particulièrement vrai pour ε_{xx} (zones entourées par des ellipses en pointillés, Fig. 5) qui est ici la

composante la plus difficile à reconstruire, le rapport signal sur bruit étant le plus faible (la direction x est uniquement sollicitée dans ce test par effet de Poisson). Donc, pour un tel cas, avec des gradients élevés sur les bords et, potentiellement, un faible rapport signal sur bruit, il semble préférable d'appliquer une dérivation point à point sur les déplacements bruts avant de lisser par MCP plutôt que l'inverse : cela produit des résultats comparables avec ceux obtenus avec AD.

4 Conclusion

Dans cet article, la possibilité d'utiliser la procédure de lissage par moindres carrés pénalisés (MCP) comme alternative pour traiter les mesures de champs cinématiques a été étudiée. À l'issue de cette étude, on peut affirmer que MCP parvient à produire des cartes de déformations à partir des déplacements avec une précision comparable aux techniques actuellement mises en place tels que l'« approximation diffuse » (AD) ou le filtre de lissage Savitzky-Golay (SG). Néanmoins, quelques précautions doivent être prises : pour des mesures cinématiques présentant des gradients élevés sur les bords de la région étudiée et avec un faible rapport signal sur bruit, il est hautement préférable d'appliquer MCP sur les champs de déformations « bruts », après une dérivation spatiale point à point des déplacements bruités.

Comparé à d'autres procédures telles que AD ou SG, MCP présente deux avantages principaux :

- Le temps de calcul de l'algorithme est indépendant de la valeur du paramètre de lissage et très inférieur à ceux de AD et de SG ;
- le paramètre h de taille de fenêtre de reconstruction pour AD et SG est un entier impair qui ne donne qu'un contrôle discret de la quantité de lissage à appliquer ; au contraire, le paramètre de lissage λ de MCP est une valeur réelle continue.

MCP semble être une alternative robuste aux techniques de lissage appliquées actuellement qui peut être choisie de manière préférentielle lorsque de grandes cartes nécessitant une importante quantité de lissage doivent être traitées en raison de sa haute vitesse d'exécution.

Enfin, de par sa formulation basée sur la transformée en cosinus discrète, la méthode pourrait très facilement être adaptée aux mesures de champs 3D de plus en plus populaires avec l'avènement de la tomographie.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Pr Paul Eilers pour les échanges utiles concernant les principes et les développements de l'algorithme des moindres carrés pénalisés. Ils aimeraient également remercier le Dr Marco Rossi pour l'algorithme Savitzky-Golay 2D utilisé dans cette étude. Enfin, ils tiennent à remercier leurs collègues à Arts et Métiers ParisTech pour leur aide à différentes étapes du travail.

Références

- [1] P. Feissel. Du déplacement à la déformation (Chap. 7). In *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*, pages 209–241. Hermes Science, 2011.
- [2] R.R. Cordero, J. Molimard, F. Labbé, and A. Martínez. Strain maps obtained by phase-shifting interferometry : an uncertainty analysis. *Optics communications*, 281(8) :2195–2206, 2008.

- [3] R Moulart, S. Avril, and F. Pierron. Identification of the through-thickness rigidities of a thick laminated composite tube. *Composites Part A*, 37(2) :326–336, 2006.
- [4] S. Avril, P. Feissel, F. Pierron, and P. Villon. Comparison of two approaches for differentiating full-field data in solid mechanics. *Measurement Science & Technology*, 21(1) :015703, 2010.
- [5] J.S. Simonoff. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer-Verlag, 1996.
- [6] C. Loader. Smoothing : Local regression techniques. In *Handbook of Computational Statistics*, pages 539–563. Springer, 2004.
- [7] P. A. Gorry. General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (Savitzky-Golay) method. *Analytical Chemistry*, 62 :570–573, 1990.
- [8] G. Bohlmann. Ein Ausgleichungsproblem. In *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 260–271. 1899. En allemand.
- [9] E.T. Whittaker. On a new method of graduation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41 :63–75, 1923.
- [10] P. H. C. Eilers. A perfect smoother. *Analytical Chemistry*, 75 :3631–3636, 2003.
- [11] D. Garcia. Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(4) :1167–1178, 2010.
- [12] M. J. Buckley. Fast computation of discretized thin-plate smoothing spline for image data. *Biometrika*, 81(2) :247–258, 1994.
- [13] S. Avril, F. Pierron, Y. Pannier, and R. Rotinat. Stress reconstruction and constitutive parameter identification in plane-stress elasto-plastic problems using surface measurements of deformation fields. *Experimental Mechanics*, 48(4) :403–419, 2008.
- [14] Y. Surrel. Moiré and grid methods : a signal-processing approach. In *SPIE 2342, Interferometry '94 : Photomechanics*, pages 213–220. 1994.