ANALYSE DE STABILITE DES EVOLUTIONS QUASI-STATIQUES DE SYSTEMES STANDARD DISSIPATIFS

F. ABED-MERAIM*, Q.-S. NGUYEN**
* LPMM UMR CNRS 7554, ENSAM CER de Metz, 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz – France
** LMS UMR CNRS 7649, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex – France

INTRODUCTION

Cette étude est consacrée à la stabilité de la réponse quasi-statique de systèmes standard dissipatifs (visco-élastiques, visco-plastiques ou élasto-plastiques). Dans le cas de solides visqueux (visco-élastiques ou visco-plastiques), pour lesquels la réponse à une sollicitation est en partie différée dans le temps, l'absence d'équilibre nous suggère naturellement d'étudier la stabilité de leurs évolutions quasi-statiques. Dans le cas de solides élasto-plastiques, cette approche est motivée par le fait que, bien souvent, nous sommes en présence d'une réponse quasi-statique pour un trajet de chargement donné ; même si cette évolution représente une succession d'états d'équilibres. Cette notion de stabilité au sens des trajectoires est donc plus générale que celle d'un équilibre, plus communément étudiée en mécanique. Elle généralise d'ailleurs l'étude de stabilité d'un état d'équilibre, qui peut être vu comme un cas particulier de trajectoires. La principale difficulté rencontrée dans l'analyse de stabilité de solutions non-stationnaires vient du caractère non autonome des équations différentielles gouvernant leur évolution. Quelques résultats partiels, mais beaucoup moins généraux que le théorème de stabilité de Lyapunov pour un équilibre, peuvent être trouvés pour des systèmes linéaires non autonomes [5], [12]. Ainsi, l'application de la méthode de linéarisation de Lyapunov ne donne qu'une réponse partielle, car elle ne s'applique que pour des systèmes suffisamment réguliers, d'une part, et conduit à des équations non autonomes, d'autre part. Pour les solides visco-élastiques, nous appliquons cette méthode de linéarisation qui nous donne une condition de stabilité asymptotique basée sur la définie positivité de la seconde variation de l'énergie [1], [2]. Pour des solides à potentiel de dissipation moins régulier, élasto-plastiques ou visco-plastiques, une approche par estimations directes est appliquée et nous donne une condition suffisante de stabilité basée sur la positivité de la seconde variation de l'énergie le long de la réponse considérée [3]. Ce critère unifié représente une extension du critère de seconde variation, bien connu en théorie de stabilité élastique, au cas de stabilité d'évolutions quasi-statiques. Plus récemment, une version étendue de l'équation d'évolution de Biot a été considérée pour discuter la stabilité d'une réponse quasi-statique dans le cadre de matériaux standard généralisés [3]. On montre également que pour les théories à gradients cette équation reste valide, puisque les gradients d'ordres supérieurs peuvent être introduits dans les expressions des deux potentiels (énergie libre et dissipation). Ainsi, l'étude de stabilité d'une évolution quasi-statique gouvernée par l'équation de Biot étendue a été discutée [3], nous permettant de faire une généralisation du critère de stabilité de seconde variation de l'énergie.

EQUATIONS D'EVOLUTION

On considère le cadre général des matériaux standard généralisés [6] définis à partir de la donnée des deux potentiels (énergie libre et dissipation). Cette modélisation conduit à l'équation différentielle de Biot qui a été largement discutée en visco-élasticité [4]. Si l'on note par $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ le couple représentant le champ de déplacement et les variables internes, les équations d'évolution quasi-statique sont données par l'équation différentielle de Biot :

$$W_{,\mathbf{q}}(\mathbf{q}) + D_{,\dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \lambda) \qquad (1)$$

Dans cette équation, $W(\mathbf{q})$, $D(\dot{\mathbf{q}})$ et $\boldsymbol{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \lambda)$ désignent, respectivement, le potentiel d'énergie libre, le potentiel de dissipation et les efforts extérieurs ; $\lambda(t)$ est un paramètre de chargement. Si $\mathbf{q}$ est le paramètre de déplacement, alors (1) représente l'équation d'équilibre obtenue par le principe des travaux virtuels (sans les termes d'inertie). Lorsque $\mathbf{q}$ désigne un paramètre interne $\boldsymbol{\alpha}$, la force extérieure $\boldsymbol{F}$ associée est nulle, et l'on obtient la relation suivante :

$$W_{,\boldsymbol{\alpha}} + D_{,\dot{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Autrement dit, pour une telle variable interne, la force thermodynamique définie par $\mathbf{A} = -W_{,\boldsymbol{\alpha}}$ satisfait aussi la relation $\mathbf{A} = D_{,\dot{\boldsymbol{\alpha}}}$. L'équation (2) traduit donc l'équilibre des forces internes réversibles et dissipatives. Le fait que les variables internes peuvent modéliser des phénomènes physiques très variés, et que les forces internes associées sont définies simplement à partir des potentiels d'énergie libre et de dissipation explique le grand intérêt de l'équation de Biot qui couvre la plupart des lois usuelles de visco-plasticité et de plasticité. Ce cadre d'étude inclut le cas général de potentiels non linéaires et, en particulier, le cas d'un potentiel de dissipation homogène de degré 1 qui est une fonction convexe mais non différentiable. Dans ce dernier cas, il a été montré que l'analyse convexe est le bon cadre mathématique pour étendre l'équation de Biot aux potentiels convexes mais non différentiables. Dans ce contexte, la dérivée $D_{,\dot{\mathbf{q}}}$, dans l'équation (1), doit être comprise au sens de sous-gradient. En particulier, l'équation $\mathbf{A} = D_{,\dot{\boldsymbol{\alpha}}}$ est une équation différentielle reliant les forces motrices $\mathbf{A}$ aux flux $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, connue dans la littérature comme l'équation complémentaire. Il est souvent plus pratique de raisonner sur des équations différentielles globales. Pour cela, les équations locales précédentes vont être réécrites sous une forme globale condensée en utilisant les potentiels globaux d'énergie libre et de dissipation :

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{q}) dv \quad , \quad \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \int_{\Omega} D(\dot{\mathbf{q}}) dv \qquad (3)$$

L'équation d'évolution se met sous la forme compacte :

$$\delta \mathcal{W}(\mathbf{q}) + \delta \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \left(\mathcal{W}_{,\mathbf{q}} + \mathcal{D}_{,\dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q} = \mathcal{F} \cdot \delta \mathbf{q} \qquad (4)$$

Par exemple, les forces extérieures s'écrivent classiquement :

$$\mathcal{F} \cdot \delta \mathbf{q} = \int_{\Omega} \boldsymbol{F}(\lambda) \cdot \delta \mathbf{q} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}(\lambda) \cdot \delta \mathbf{q} \, ds \qquad (5)$$

Il est à noter que pour un milieu continu déformable, les variables d'état $\mathbf{q}$ représentent des champs de tenseurs. Ces derniers peuvent représenter le déplacement et les variables internes mais également leurs gradients. On a montré récemment que le cas de gradients d'ordres supérieurs [10] est également inclus dans cette modélisation [3]. Les théories du second gradient en élasticité ou en plasticité ainsi que le modèle à champ de phase peuvent être pris en compte dans le même esprit (voir pour plus de détails la réf. [3]). Pour discuter la stabilité de tels modèles gouvernés par l'équation de Biot étendue (4), on décompose les forces externes F en parties conservative F^c et dissipative F^d admettant, respectivement, comme énergie potentielle P^c et comme potentiel de dissipation P^d de telle sorte que :

$$\begin{cases} F(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\lambda) = F^c(\mathbf{q},\lambda) + F^d(\dot{\mathbf{q}},\lambda) \\ F^c(\mathbf{q},\lambda) = -P^{\mathrm{c}}_{,\mathbf{q}}(\mathbf{q},\lambda) \quad , \quad F^d(\dot{\mathbf{q}},\lambda) = -P^{\mathrm{d}}_{,\dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}},\lambda) \end{cases} \tag{6}$$

Ces potentiels seront regroupés avec les notations suivantes :

$$\overline{W}(\mathbf{q},\lambda) = W(\mathbf{q}) + P^{\mathrm{c}}(\mathbf{q},\lambda) \;;\; \overline{D}(\dot{\mathbf{q}},\lambda) = D(\dot{\mathbf{q}}) + P^{\mathrm{d}}(\dot{\mathbf{q}},\lambda)$$

où $\overline{W}(\mathbf{q},\lambda)$ et $\overline{D}(\dot{\mathbf{q}},\lambda)$ désignent, respectivement, l'énergie potentielle totale et le potentiel de dissipation total du système. Ainsi, l'évolution quasi-statique est gouvernée par l'équation différentielle de Biot sous la forme compacte :

$$\begin{cases} \overline{W}_{,\mathbf{q}}(\mathbf{q},\lambda) + \overline{D}_{,\dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}},\lambda) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \;,\; \lambda = \lambda(t) \;,\; 0 \le t < +\infty \end{cases} \tag{7}$$

ANALYSE DE STABILITE

Les études de stabilité ou de bifurcation à partir d'un état d'équilibre, pour des solides élastiques ou élasto-plastiques, ont fait l'objet d'importants travaux dans la littérature [7], [9], [11]. Dans ce travail, on s'intéresse à la stabilité de la réponse quasi-statique d'un système dissipatif standard, qui représente une notion plus forte que la stabilité d'équilibre. Pour un solide soumis à un trajet de chargement donné, la stabilité de sa réponse, sous l'effet de perturbations appliquées, traduit la continuité uniforme de la solution par rapport aux conditions initiales. Notons que le besoin de cette extension est également motivé par les instabilités observées expérimentalement pour des solides visqueux (visco-élastiques et visco-plastiques) et dont la justification par l'analyse de bifurcation n'a pas été possible. Dans ce qui suit, nous allons donner quelques résultats généraux de stabilité d'une réponse évolutive pour un système dissipatif gouverné par l'équation (7). Pour un trajet de chargement $\lambda(t)$ donné, la résolution de (7) nous donne une évolution quasi-statique fondamentale notée $\mathbf{q}^0(t) = \left(\mathbf{u}^0(t), \boldsymbol{\alpha}^0(t)\right)$ dont l'étude de stabilité sera faite en suivant deux approches complémentaires.

Méthode de linéarisation (stabilité asymptotique)

Lorsque le potentiel de dissipation est régulier, essentiellement en visco-élasticité, la méthode de linéarisation peut être appliquée. D'après (7), l'équation linéarisée autour de la solution fondamentale $\mathbf{q}^0(t)$ s'écrit :

$$\overline{W}^0_{,\mathbf{qq}} \cdot \mathbf{q}^* + \overline{D}^0_{,\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0} \quad , \; \forall t > 0 \tag{8}$$

Pour un potentiel de dissipation strictement convexe, l'opérateur $\overline{D}^0_{,\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}}$ est inversible et l'équation (8) équivaut à :

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \boldsymbol{\psi}(t) \cdot \mathbf{q}^* \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\psi}(t) = -\overline{D}^{0\;-1}_{,\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}} \cdot \overline{W}^0_{,\mathbf{qq}} \tag{9}$$

qui est une équation différentielle non-autonome voir [1]. Dans ces conditions, le théorème de Lyapunov ne peut pas s'appliquer car il est valable pour des équations différentielles à opérateur indépendant du temps. En prenant en compte le caractère non-autonome du problème, on obtient le résultat suivant (voir [1], [2] pour les développements complets). Si la forme bilinéaire suivante :

$$\overline{W}^0_{,\mathbf{qq}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\overline{D}^0_{,\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}} > \mathbf{0} \quad , \; \forall t > 0 \tag{10}$$

est uniformément définie positive pour tout t, alors l'évolution fondamentale $\mathbf{q}^0(t)$ est asymptotiquement stable. Il est à noter que ce résultat de stabilité, même s'il utilise le système linéarisé, est valable pour le problème d'évolution de départ qui est non linéaire. De même, à la différence du cas de systèmes autonomes traités par le théorème de Lyapunov, il n'y a pas de résultats généraux pour conclure à l'instabilité d'un système donné par une équation différentielle non-autonome telle que (9). On montre en particulier que l'existence de valeurs propres constantes et positives pour l'opérateur $\boldsymbol{\psi}(t)$ n'entraine pas nécessairement l'instabilité de la solution évolutive associée. Dans le cas où le potentiel de dissipation est quadratique, on obtient comme condition de stabilité asymptotique la stricte positivité de la seconde variation de l'énergie totale :

$$\delta^2\overline{W} = \overline{W}^0_{,\mathbf{qq}}\left[\delta\mathbf{q},\delta\mathbf{q}\right] > \mathbf{0} \;,\; \forall\,\delta\mathbf{q} \ne \mathbf{0} \;,\; \forall t \tag{11}$$

Méthode par estimations directes

Pour des potentiels de dissipation convexes mais non différentiables (comportements visco-plastiques ou élasto-plastiques), la méthode de linéarisation ne peut s'appliquer. On utilise donc une méthode directe d'estimation inspirée des méthodes de régularisation visco-plastique visant à montrer l'existence et l'unicité d'une évolution élasto-plastique avec écrouissage, ainsi que sa continuité par rapport aux données initiales (voir [8]). Les démonstrations complètes sont données dans [2], [3] ; nous ne donnerons ici que les principales étapes, hypothèses et conclusions. Le potentiel de dissipation D est supposé convexe, à seuil et indépendant de l'état actuel. Ainsi le domaine élastique C est un convexe indépendant de l'état et contenant strictement l'origine à son intérieur. Puisque $\mathbf{u}$ n'est pas un mécanisme dissipatif en visco-plasticité et élasto-plasticité, les équations d'évolution sont données par :

$$\begin{cases} \overline{W}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\alpha},\lambda) = \mathbf{0} \\ \overline{W}_{,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\alpha},\lambda) + \overline{D}_{,\dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\lambda) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \;,\; \lambda = \lambda(t) \;,\; 0 \le t < +\infty \end{cases} \tag{12}$$

On étudie la stabilité d'une solution $\mathbf{q}^0(t)$ bornée avec les hypothèses usuelles sur le chargement et l'énergie au voisinage de cette solution. Parmi ces hypothèses, outre la différentiabilité de l'énergie et sa convexité forte, il est supposé que ses dérivées sont bornées au voisinage de $\mathbf{q}^0(t)$. L'étude de stabilité consiste, comme pour la preuve du théorème de Lyapunov, à montrer que pour une faible perturbation appliquée, la solution perturbée restera proche de la solution fondamentale pour tout instant t.

Le principal résultat obtenu dans cette analyse est que la stricte positivité de la seconde variation de l'énergie totale du système est une condition suffisante de stabilité de son évolution quasi-statique.

CRITERE DE SECONDE VARIATION D'ENERGIE

Nous avons montré que la stabilité de la réponse quasi-statique d'un solide dissipatif standard (élasto-plastique ou visco-plastique) est assurée par le critère de positivité de la seconde variation de l'énergie totale du système :

$$\delta^2 \bar{W} = \bar{W}^0_{,\mathbf{qq}}\left[\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}\right] > \mathbf{0} \ , \ \forall\, \delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0} \ , \ \forall t \qquad (13)$$

Dans le cas d'un solide visco-élastique à potentiel de dissipation quadratique et convexe, nous avons un résultat plus fort de stabilité asymptotique avec ce même critère.
Il est intéressant de comparer les résultats obtenus pour la stabilité d'une évolution quasi-statique avec les résultats existants relatifs à la stabilité d'un équilibre. Considérons pour cela quelques cas de comportements particuliers. Par exemple, lorsque le comportement est complètement réversible (évolution purement élastique) on retrouve bien le critère de l'énergie bien connu dans la théorie de stabilité d'équilibres élastiques. Cependant, notre approche donne non seulement une autre preuve de ce critère énergétique, en considérant l'équilibre comme un cas particulier de trajectoire associée à un chargement fixe, mais en plus le résultat que l'on obtient est plus fort puisqu'il montre que toute l'évolution quasi-statique est asymptotiquement stable sous la condition de stabilité élastique. Il est intéressant aussi d'analyser le cas où le paramètre $\mathbf{u}$ est le seul mécanisme dissipatif comme pour le modèle visco-élastique de Kelvin. Puisque $\boldsymbol{\alpha}$ n'apparait pas dans l'expression de l'énergie, la condition de stabilité asymptotique obtenue revient à satisfaire la positivité de la seconde variation de l'énergie élastique totale. Il vient donc que l'évolution quasi-statique d'un solide qui suit le modèle de Kelvin est asymptotiquement stable si la condition de stabilité élastique est satisfaite aux points courants de cette évolution.

Comparaison au critère de Hill

Dans les travaux de Hill [7], une condition suffisante de stabilité ainsi qu'une condition de non bifurcation pour un solide élasto-plastique ont été établies. Ces conditions ont été analysées dans le cadre des matériaux standard généralisés [9] et reformulées avec une approche qui fait intervenir le couple de variables d'état $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$. Il a été montré notamment que la condition de stabilité d'un équilibre élasto-plastique est donnée par la positivité de la seconde variation de l'énergie par rapport aux variables $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ avec $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A})$ (cône des normales extérieures au convexe d'élasticité) ; et que la condition de non bifurcation exige la positivité de cette même forme quadratique mais sur un espace plus grand $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ avec $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathrm{N}}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A})$ (espace vectoriel engendré par le cône des normales extérieures au convexe d'élasticité). Ceci conduit donc à deux charges critiques distinctes : λ_R (charge du module réduit) pour la stabilité de l'équilibre élasto-plastique et $\lambda_T \leq \lambda_R$ (charge du module tangent) pour la bifurcation du problème en vitesses. On peut remarquer que la condition de stabilité des évolutions quasi-statiques que nous avons établie, et qui porte sur le critère de seconde variation de l'énergie, présente une certaine analogie avec le critère de non-bifurcation de Hill. En général, la condition de stabilité établie (13) est plus conservative que la condition de non-bifurcation de Hill. En revanche, si le paramètre $\boldsymbol{\alpha}$ engendre tout l'espace, alors ces deux critères coïncident ce qui est le cas pour des modèles de poutres.

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Dans cette étude, nous avons montré que le critère de positivité de la seconde variation de l'énergie est une condition suffisante de stabilité pour la réponse quasi-statique de systèmes standard dissipatifs gouvernés par l'équation de Biot étendue. On a montré également que cette équation d'évolution, écrite sous une forme compacte et unifiée, inclue une large classe de matériaux (visco-élastiques, visco-plastiques et élasto-plastiques). De même, les modèles à gradients peuvent se mettre sous ce formalisme moyennant l'introduction des gradients d'ordres supérieurs dans les expressions des potentiels d'énergie libre et de dissipation. Ceci montre la portée, assez générale, du critère de stabilité obtenu dans cette étude.

REFERENCES

[1] ABED-MERAIM F., "Conditions suffisantes de stabilité pour les solides visqueux". *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b / Mécanique*, t. 327 (1), 25-31, 1999.

[2] ABED-MERAIM F., "*Quelques problèmes de stabilité et de bifurcation des solides visqueux*". Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1999.

[3] ABED-MERAIM F. and NGUYEN Q.-S., "A quasi-static stability analysis for Biot's equation and standard dissipative systems". *European Journal of Mechanics A/Solids*, Available online at www.sciencedirect.com, 2006.

[4] BIOT M., "*Mechanics of Incremental Deformation*". Wiley, New York, 1965.

[5] HAHN W., "*Stability of Motion*". Springer, Berlin, 1967.

[6] HALPHEN B. and NGUYEN Q.-S., "Sur les matériaux standard généralisés". J. de Mécanique, 14, 1-37, 1975.

[7] HILL R., "A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids". *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236-249, 1958.

[8] LABORDE P. and NGUYEN Q.-S., "Etude de l'équation d'évolution des systèmes dissipatifs standard". *Math. Model. Num. Anal.*, 24(1), 67-84, 1990.

[9] NGUYEN Q.-S., "Bifurcation and stability in dissipative media (plasticity, friction, fracture)". *Appl. Mech. Rev.* 47, 1-31, 1994.

[10] NGUYEN Q.-S. and ANDRIEUX S., "The non-local generalized standard approach: a consistent gradient theory". *C. R. Mécanique*, 333, 139-145, 2005.

[11] PETRYK H., "A consistent approach to defining stability of plastic deformed processes". In: *IUTAM Symp. Stability in the Mechanics of Continua*, Springer, Berlin, 262-272, 1982.

[12] ROSEAU M., "*Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*". Springer, Berlin, 1966.