



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10438>

#### **To cite this version :**

Guillaume ALTMEYER, Farid ABED-MERAIM, Tudor BALAN - Modélisation de critères de localisation : prédiction de l'orientation des bandes de localisation et tracé de courbes limites de formage - In: 19ème Congrès Français de Mécanique, France, 2009-08-24 - 19ème Congrès Français de Mécanique - 2009

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)





## Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>  
Handle ID: [.http://hdl.handle.net/null](http://hdl.handle.net/null)

### To cite this version :

Guillaume ALTMAYER, Farid ABED-MERAIM, Tudor BALAN - Modélisation de critères de localisation : prédiction de l'orientation des bandes de localisation et tracé de courbes limites de formage - In: 19ème Congrès Français de Mécanique, France, 2009-08-24 - 19ème Congrès Français de Mécanique - 2009

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [archiveouverte@ensam.eu](mailto:archiveouverte@ensam.eu)

# Modélisation de critères de localisation : prédiction de l'orientation des bandes de localisation et tracé de courbes limites de formage

G. Altmeyer, F. Abed-Meraim, T. Balan

Arts et Métiers ParisTech – Centre de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux,  
4 rue Augustin Fresnel, 57 078 Metz

## Résumé :

*Différentes approches de modélisations ont été proposées pour prédire les phénomènes de localisation lors d'opérations de mise en forme de tôles métalliques par emboutissage. Des exemples de ces approches sont le principe de force maximum, les critères à deux zones et les analyses de bifurcation ou de stabilité. En l'absence de consensus relatif à leur choix et à l'étendue de leur domaine de validité, la présente étude se propose de formuler ces modélisations dans un cadre unifié, de mettre en évidence les liens théoriques pouvant exister entre elles et ensuite de valider ces observations par le tracé de courbes limites de formage et par la comparaison de l'orientation des bandes de localisation.*

## Abstract:

*Various modeling approaches have been proposed to predict localization phenomena during forming processes of metal sheets. Examples of these are the Maximum Force principle, two-zone criteria, and bifurcation analysis or stability studies. The main objective of this presentation is to implement these different localization formulations into a general unified framework, to point out possible theoretical links between them, and to validate these observations through numerical applications such as forming limit diagrams and the corresponding orientation of the localization bands.*

**Mots clefs :** striction, localisation, courbe limite de formabilité, emboutissage.

## 1 Introduction

Lors des opérations de mise en forme de tôles métalliques par emboutissage, des phénomènes de localisation des déformations peuvent conduire à des défauts au sein du produit. La capacité de prédiction des limites de formage des tôles métalliques est donc un enjeu majeur pour les industries mécaniques. Le besoin d'un outil prédictif fiable est renforcé par l'utilisation croissante de nouvelles nuances d'aciers ou de matériaux de substitution.

Au cours des dernières décennies, différentes approches de modélisations ont été proposées pour prévoir les phénomènes de localisation. Le principe de force maximum (introduit par Considère puis généralisé par Swift [1], Hora et al. [2] et Hill [3]) est simple et facile à mettre en œuvre mais repose sur un postulat expérimental difficilement vérifiable. Les critères par analyse de bifurcation (Drucker [4], Rice [5], Bigoni et Hueckel [6]) offrent un cadre théorique rigoureux de prédiction des localisations par bande de cisaillement ; leur utilisation reste cependant principalement limitée aux matériaux indépendants du temps et adoucissants. Le critère de Marciniak-Kuczyński [7], basé sur l'évolution d'un défaut initialement présent dans la structure, est applicable à une large gamme de matériaux mais introduit des paramètres d'ajustement. Les approches basées sur l'analyse de stabilité par perturbation (Dudzinski et Molinari [8]) semblent être des alternatives plus générales par rapport aux méthodes par bifurcation. Aucun consensus n'existant quant au choix de critères de localisation face à l'avènement des nouveaux matériaux, l'originalité de la présentation est de formuler les critères de Hill, Rice et Marciniak-Kuczyński dans un cadre unifié, de mettre en évidence ou d'établir les liens théoriques entre les différents critères puis de valider ces observations par l'étude de l'orientation des bandes de localisation et le tracé de courbes limites de formage pour un acier Dual Phase.

## 2 Modélisation du comportement du matériau

La modélisation adoptée est basée sur une approche phénoménologique générale permettant de décrire le comportement de matériaux élasto-plastiques dans le cadre d'une règle d'écoulement plastique associée. Les effets de l'écroutissage, de l'anisotropie initiale et de l'endommagement sont introduits. Le taux de contrainte est relié au taux de déformation par la relation (1) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (1)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  représentent respectivement le taux de contrainte de Cauchy, le tenseur des modules d'élasticité et les taux de déformations totale, élastique et plastique. L'expression de ce dernier peut être obtenue à l'aide de la loi de normalité :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{V} \quad (2)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique. La fonction de charge  $f$  peut être exprimée en fonction de la contrainte équivalente au sens de Hill'48,  $\bar{\sigma}$ , et de l'ensemble des variables internes  $\mathbf{y}_i$  :

$$f(\bar{\sigma}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (3)$$

L'évolution des variables internes est gouvernée par leurs lois d'évolutions pouvant s'écrire sous la forme :

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \dot{\lambda} \mathbf{H}_{\mathbf{y}_i} \quad (4)$$

Dans le cas des écroutissages isotropes, les lois de Swift et de Voce s'écrivent respectivement :

$$\dot{R}_S = nk (\varepsilon_0 + \varepsilon_p)^{n-1} \dot{\lambda} = H_{R_S} \dot{\lambda}, \quad R_S(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{R}_V = C_R (R_{sat} - R_V) \dot{\lambda} = H_{R_V} \dot{\lambda}, \quad R_V(0) = 0 \quad (5)$$

D'autre part, afin de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale présente dans les tôles obtenues par laminage, la contrainte équivalente est ici calculée par la fonction quadratique de Hill'48, dont les paramètres sont définis ci-après. En combinant les équations précédentes avec la règle de cohérence, il est possible d'établir une relation entre le taux de contrainte et le taux de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{V} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}_i} : \mathbf{H}_{\mathbf{y}_i}} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6)$$

où  $\mathbf{L}$  est le module tangent du comportement élasto-plastique non-endommageable. Pour certains critères de localisation, l'introduction d'un adoucissement est nécessaire. Dans le cadre de la plasticité associée, celui-ci peut être introduit par de l'endommagement. La loi d'évolution de l'endommagement isotrope utilisée est donnée par :

$$\dot{d} = \frac{1}{(1-d)^{\beta_{end}}} \left\langle \frac{Y_e - Y_{ei}}{S} \right\rangle^s \dot{\lambda} \quad (7)$$

où  $d$  est la variable d'endommagement et  $\beta_{end}$ ,  $S$ ,  $s$  et  $Y_{ei}$  des paramètres matériau. Par conséquent, la relation incrémentale reliant contrainte et déformation est modifiée ainsi que le module tangent associé par :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \frac{\dot{d}}{1-d} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_{end} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8)$$

où  $\mathbf{L}_{end}$  est le module tangent couplé à l'endommagement. Les critères de localisation développés dans le paragraphe suivant ont été appliqués à un acier Dual Phase. Les paramètres de ce matériau issus de la littérature sont donnés ci-dessous :

Table 1. Paramètres de l'acier Dual Phase [9].

$R_{sat}$	$C_R$	$r_0$	$r_{45}$	$r_{90}$	$\beta_{end}$	$S$	$s$	$Y_{ei}$
551.4	9.3	1	1.5	2	5	20	0.01	0

### 3 Critères de localisation

#### 3.1 Critère de Hill'52

Basé sur le principe de Force Maximum de Considère selon lequel la striction se produit lorsque la force atteint son maximum au cours d'un essai de traction, le critère de localisation de Hill'52 introduit une condition sur l'effort normal à la bande ainsi qu'une condition sur l'orientation de la direction de la bande dans laquelle peut se produire la localisation. La localisation est supposée se produire selon une direction de déformation stationnaire, conduisant suivant les notations de la figure 1 à la condition suivante :

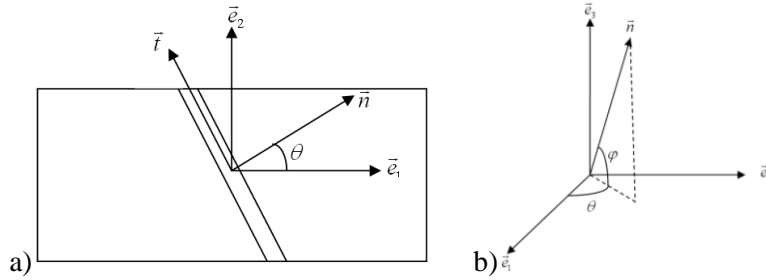


FIG. 1 – Orientation de la bande de localisation pour les critères a) de Hill et b) de Rice.

$$d\varepsilon_t = 0$$

$$\sin^2 \theta d\varepsilon_1 + \cos^2 \theta d\varepsilon_2 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2(\theta) = -\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} = -\beta$$

Cette condition restreint la prédiction à des modes de localisation dans le plan de la tôle dans le domaine du retreint. D'autre part, la condition de maximum de l'effort normal à la bande peut s'écrire :

$$dF_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma_n}{\sigma_n} = d\varepsilon_n \quad (10)$$

#### 3.2 Critère de bifurcation de Rice

Dans cette approche, la localisation est vue comme le passage d'un état de déformation quasi-homogène vers un état de déformation hétérogène, présentant une discontinuité du gradient des vitesses, et dans lequel la déformation se concentre dans une bande de cisaillement. Cette perte d'homogénéité de la solution de l'équilibre peut être vue comme une perte d'unicité de la solution du problème d'équilibre et traitée par la recherche de la possibilité d'existence d'un mode de déformation discontinu au sein de la tôle. Cette discontinuité du gradient des vitesses peut s'écrire :

$$\mathbf{G}^B - \mathbf{G}^A = [\mathbf{G}] = \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \quad (11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^B = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^A + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{c}})$$

où  $A$  et  $B$  indiquent respectivement les zones à l'extérieur et à l'intérieur de la bande où se produit la localisation.  $\mathbf{G}$  est le gradient des vitesses, pouvant présenter un saut  $\dot{\mathbf{c}}$ . La notation  $[\cdot]$  dénote le saut d'une

grandeur entre l'intérieur et l'extérieur de la bande. L'équilibre entre ces zones devant être respecté, la relation (12) doit être vérifiée :

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{0} \quad (12)$$

En utilisant les relations (8), (11) et la dérivée temporelle de (12), on peut obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L}_{end}^B : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^B - \mathbf{L}_{end}^A : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^A) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{L}_{end}^B : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^A + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{c}}) \right) - \mathbf{L}_{end}^A : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^A \right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L}_{end}^B : \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} + [\mathbf{L}_{end}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^A) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

Les modules tangents pouvant être supposés égaux jusqu'à l'initiation de la localisation, leur saut est considéré nul, d'où l'obtention de la condition de localisation :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{end} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{end} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (14)$$

La résolution s'effectue en recherchant l'orientation de la bande permettant d'obtenir la déformation critique minimum. Le critère de Rice permet de prédire des modes de localisation dans le plan de la tôle ou hors plan.

### 3.3 Comparaison de l'orientation des bandes de localisation avec les critères de Hill et de Rice

L'application du critère de Rice à l'acier Dual Phase permet de voir l'influence de l'orientation de la normale à la bande de localisation. La figure 2 représente pour différents trajets de chargements la déformation principale majeure critique en fonction de l'orientation de la normale à la bande (figure 1.b) :

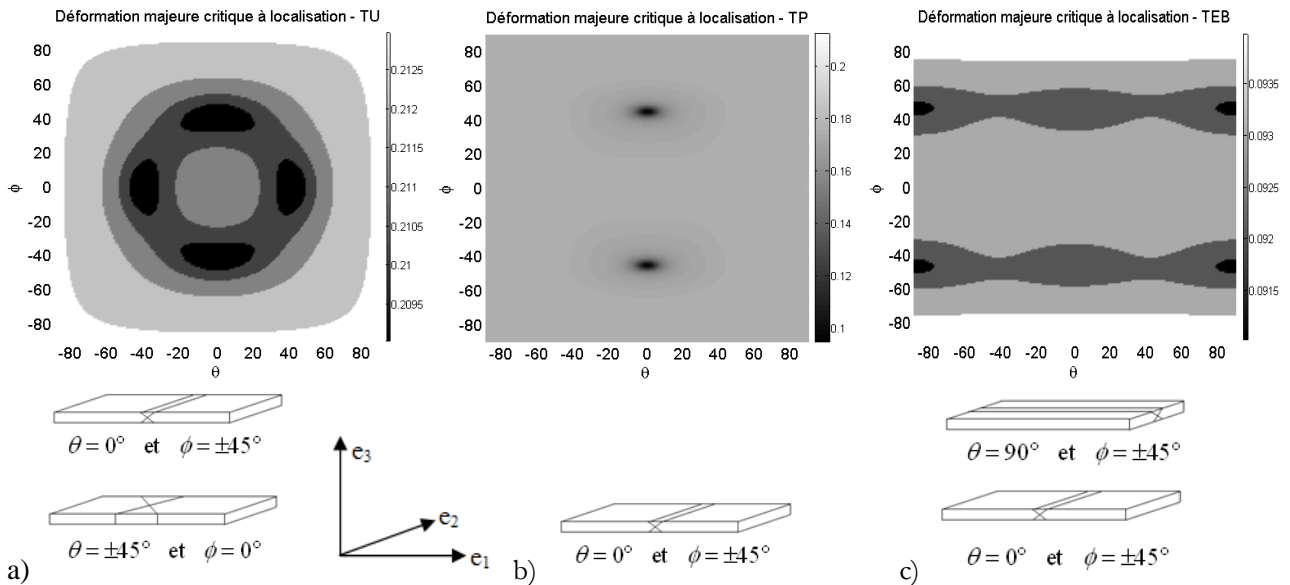


FIG. 2 – Prédiction de l'orientation des bandes de localisation par le critère de Rice. Déformations majeures à localisation en fonction de l'orientation de la normale au plan de la bande de localisation pour des trajets de chargement a) en traction uniaxiale, b) en traction plane et c) au voisinage de la traction équilibrée.

Cette application permet de mettre en évidence la prédominance de modes hors plan, non prédits par le critère de Hill. D'autre part, en restreignant l'analyse aux seuls modes de localisation situés dans le plan (direction  $\varphi = 0$ ), le critère de Rice permet de retrouver les orientations prévues par la formule de Hill (9).

### 3.4 Critère de Marciniak-Kuczyński

Le critère M-K est basé sur l'introduction d'un défaut initial sous forme d'une bande B de normale  $\mathbf{n}$  et d'épaisseur réduite  $t_0^B$  dans une tôle A d'épaisseur  $t_0^A$ . Au cours du chargement de la tôle, l'état mécanique de la zone A est calculé, ainsi que celui de la zone B, en tenant compte de la compatibilité des déformations à l'interface :

$$f_0 = \frac{t_0^B}{t_0^A} \quad \text{et} \quad f = \frac{t^B}{t^A} = f_0 e^{\varepsilon_{33}^B - \varepsilon_{33}^A}$$

$$\dot{\varepsilon}^B = \dot{\varepsilon}^A + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{c}}) \quad (15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^A = \mathbf{L}_{end}^A : \dot{\varepsilon}^A \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^B = \mathbf{L}_{end}^B : \dot{\varepsilon}^B$$

où  $\dot{\mathbf{c}}$  est une inconnue. En introduisant les équations d'équilibre, on peut obtenir :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^B t^B = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^A t^A$$

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^B f + \boldsymbol{\sigma}^B \dot{f} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^A) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{L}_{end}^B : \dot{\varepsilon}^B f + \boldsymbol{\sigma}^B \dot{f} - \mathbf{L}_{end}^A : \dot{\varepsilon}^A) = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left( f (\mathbf{L}_{end}^B - \mathbf{L}_{end}^A) : \dot{\varepsilon}^A - (1-f) \mathbf{L}_{end}^A : \dot{\varepsilon}^A + \dot{f} \boldsymbol{\sigma}^B + f \mathbf{L}_{end}^B : (\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n}) \right) = \mathbf{0}$$

La dernière équation permet de déterminer l'état de déformation dans la zone B. La localisation est ensuite prédite lorsque la déformation se concentre dans la zone du défaut. Cette prédiction est effectuée à l'aide d'un critère choisi par l'utilisateur, par exemple lorsque le rapport des taux de déformations dans les zones B et A dépasse un certain seuil défini initialement.

### 3.5 Relation entre les critères de Rice et de Marciniak-Kuczyński

En se situant dans le cas du critère M-K dans lequel on se place dans la limite d'un défaut tendant vers zéro (i.e. défaut infinitésimal ou encore presque aucun défaut initial d'épaisseur n'est introduit), on obtient :

$$f \rightarrow 1, \quad \dot{f} \rightarrow 0, \quad \text{et} \quad \lim_{f \rightarrow 1} \mathbf{L}_{end}^B = \mathbf{L}_{end}^A \quad (17)$$

En introduisant les relations (17) dans (16), on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{L}_{end} : \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{end} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

La condition (18) correspond donc soit à la solution triviale  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ , ce qui correspond à un état de déformation homogène dans la tôle, ou à la singularité du tenseur acoustique, ce qui correspond à la condition de localisation de Rice. D'un point de vue théorique, lorsque le défaut initial tend vers zéro dans le critère M-K, on retrouve la condition de localisation de Rice. Ceci se comprend bien par le fait que si l'on recherche une bifurcation naissante ou l'instant de tout début de perte d'unicité (début d'apparition d'un mode de déformation hétérogène) avec le critère de M-K, alors on retrouve la condition de bifurcation de Rice. Cette tendance est observée numériquement en faisant tendre le rapport des épaisseurs initiales vers 1 (figure 3) :

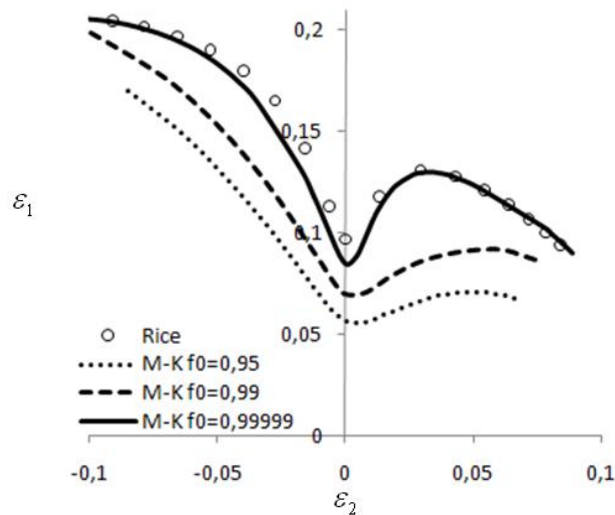


FIG. 3 – Courbes limites de formage pour un acier Dual Phase avec les critères de Rice et M-K.

#### 4 Conclusions

De nombreux critères ont été développés dans la littérature pour prédire les phénomènes de localisations se produisant lors des opérations d'emboutissage de tôles métalliques. Les bases de ces critères reposent souvent sur des observations ou sur des principes différents, toutefois certaines similitudes existent dans leur formulation. Une étude approfondie de la formulation des critères de localisation permet d'établir des liens théoriques entre certains d'entre eux ; on montre notamment que lorsque le défaut initial du critère de Marciniak-Kuczynski tend vers zéro, alors le critère de bifurcation de Rice est retrouvé. Le tracé d'une courbe limite de formage pour un acier Dual Phase permet de confirmer cette observation théorique. Dans le cas de ce matériau, le critère de Rice met aussi en évidence que les modes de localisation sont souvent des modes hors plan, cette inclinaison hors plan ne pouvant pas être prédite par les critères de Hill ou de Marciniak-Kuczynski. Des perspectives de ce travail concernent l'extension de l'étude de la formulation théorique des critères de localisation aux critères basés sur des méthodes d'analyse de stabilité par perturbation et l'étude des paramètres influençant l'orientation de la bande de localisation.

#### Références :

- [1] Swift HW. Plastic instability under plane stress. *JMPS* 1952;1: 1-18.
- [2] Hora P, Tong L, Reissner J. A prediction method of ductile sheet metal failure in FE simulation. In: Wagoner et al. Proc. NUMISHEET'96, 1996. p. 252-256.
- [3] Hill R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *JMPS* 1952;1: 19-30.
- [4] Drucker DC. Some implications of work hardening and ideal plasticity. *QAM* 1950;7: 411-418.
- [5] Rice JR. The localization of plastic deformation. In: Koiter, Theoretical and applied Mechanics. 14th IUTAM Congress, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [6] Bigoni D, Hueckel T. Uniqueness and localization – associative and non-associative elastoplasticity. *IJSS* 1991;28: 197-213.
- [7] Marciniak Z, Kuczynski K. Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal. *IJMS* 1967;9: 609-620.
- [8] Dudzinski D, Molinari A. Perturbation analysis of thermoplastic instabilities in biaxial loading. *IJSS* 1991;27(5): 601-628.
- [9] Haddag B. Contribution à la modélisation de la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation. Thèse de Doctorat, ENSAM, Metz, 2007.