



### Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/16115>

#### To cite this version :

Mathilde BARRAL, George CHATZIGEORGIOU, Fodil MERAGHNI - Homogénéisation par approche « TFA » intégrée au schéma de Mori-Tanaka pour les composites élastoplastiques/viscoélastiques/viscoplastiques : Théorie et validation numérique - In: JNC 21: Journées Nationales sur les Composites 2019, France, 2019-07-01 - Comptes Rendus des JNC 21 - 2019

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# **Homogénéisation par approche « TFA » intégrée au schéma de Mori-Tanaka pour les composites élastoplastiques/viscoélastiques/viscoplastiques : Théorie et validation numérique.**

## ***Homogenization using TFA framework and Mori-Tanaka scheme for elastoplastic/viscoelastic/viscoplastic composites: Theory and numerical validation.***

**Mathilde Barral<sup>1,2</sup>, Georges Chatzigeorgiou<sup>1</sup> et Fodil Meraghni<sup>1</sup>**

1: Arts et Métiers ParisTech, CNRS, Université de Lorraine, LEM3  
4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz  
e-mail : mathilde.barral@ensam.eu, georges.chatzigeorgiou@ensam.eu et fodil.meraghni@ensam.eu

2: GEEDS Mechanical Metier, Valeo  
76 rue Auguste Perret, 94000 Creteil  
e-mail : mathilde.barral@valeo.com

### **Résumé**

Cette étude est basée sur une approche multi-échelles à champs moyens modifiée. Elle propose un modèle micromécanique permettant de prédire le comportement global des composites élastoplastiques et viscoélastiques-viscoplastiques renforcés par des fibres longues. La méthode d'homogénéisation adoptée est le schéma de Mori-Tanaka combiné à une « analyse par champs de transformation » (abrégée anglais TFA). De plus, motivée par l'observation de la distribution des champs locaux dans les analyses d'homogénéisation par éléments finis, l'approche proposée est étendue pour introduire un type spécial d'enrobage entre les fibres et la matrice. Cette extension permet de faire face à la surestimation de la réponse globale contrainte-déformation rencontrée en utilisant la méthode classique de Mori-Tanaka. Plus précisément, l'enrobage a le même comportement initial que celui de la matrice mais les champs de déformation inélastiques (plastiques, viscoélastiques ou viscoplastiques) sont amplifiés par rapport à ceux de la matrice pendant le chargement. Dans cette étude, les équations constitutives régissant l'approche proposée sont fournies. Une validation numérique complète est effectuée sur la base de simulations de chargements non monotones ainsi que des chargements multi-axiaux non proportionnels à différentes vitesses de déformation.

### **Abstract**

This study proposes a micromechanical model based on a modified multiscale mean field approach. It predicts the overall behavior of long fiber reinforced elastoplastic and viscoelastic-viscoplastic composites. The homogenization method adopted is the Mori-Tanaka scheme combined with the Transformation Field Analysis. Moreover, motivated by the distribution of local fields observed in

finite element based homogenization analyses, the proposed approach is extended and introduces a special type of coating between the fibers and the matrix. This extension permits to deal with the overestimation of the global stress-strain response using the classical Mori-Tanaka method. Specifically, the coating has the same initial behavior as the matrix but the inelastic strain fields (plastic, viscoelastic, viscoplastic) are amplified compared to those in the matrix during loading. The constitutive equations governing the proposed approach are provided. The effectiveness of this new method is demonstrated through extensive numerical validation tests, including non-monotonic and non-proportional loading at different strain rates, against finite element simulations on the studied Representative Volume Element (RVE).

**Mots Clés:** Homogénéisation à champs moyens, Mori-Tanaka, analyse par champs de transformation, enrobage, comportement viscoélastique viscoplastique

**Keywords:** Mean field homogenization, Mori-Tanaka, Transformation Field Analysis, coating, viscoelastic-viscoplastic behavior

## 1. Introduction

Les équipementiers automobiles développent de plus en plus de composants en matériaux composites afin d'alléger les véhicules tout en gardant des propriétés thermomécaniques optimales. Pour prédire le comportement thermomécanique de composites constitués d'une matrice non-linéaire renforcée de fibres, des modèles multi-échelles sont de plus en plus utilisés pour leurs avantages, en particulier la prise en compte des effets de microstructure. Dans les théories d'homogénéisation par champs moyens, les champs de contrainte et de déformation sont considérés comme homogènes par phase, ce qui est problématique pour les composites en régime non linéaire (plastique, viscoélastique, viscoplastique couplé ou non à l'endommagement). En effet, les champs locaux sont en réalité non uniformes à cause de la non-linéarité du comportement des phases, en particulier la matrice. Dans ce cas, l'approche d'homogénéisation par champs moyens conduit généralement à des prédictions plus raides de la réponse globale contrainte-déformation [2, 4]. Afin de remédier à la surestimation de la réponse globale du composite, une nouvelle approche est proposée.

## 2. Approche proposée: Motivations

L'approche adoptée est motivée par des observations sur la distribution des champs locaux prédites par les techniques d'homogénéisation par champs complets. En effectuant une analyse EF dans une cellule unitaire contenant des fibres élastiques et une matrice non linéaire, il a été observé qu'une partie importante

de la déformation inélastique est concentrée de manière non uniforme autour des fibres (Fig. 1a). Concernant les approches multi-échelles à champs moyens, on peut donc envisager une *troisième phase virtuelle* autour de la fibre. Cette phase, appelée enrobage, ayant les mêmes propriétés initiales que celles de la matrice mais dont le champ de déformation moyen inélastique est amplifié par rapport à celui de la matrice au cours du chargement (Fig. 1b).

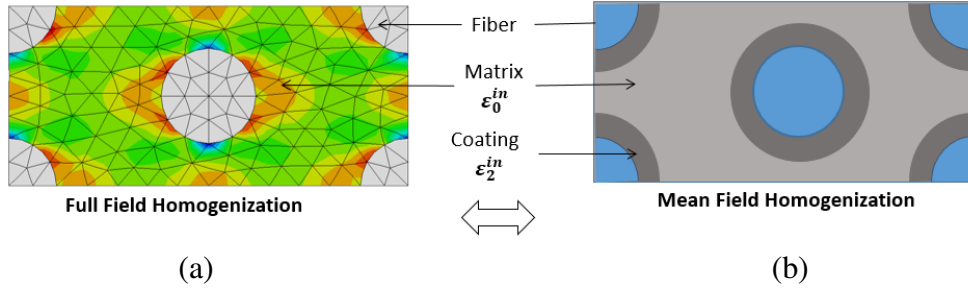


Figure 1: (a) Déformations inélastiques générées dans une cellule unitaire par éléments finis constituée de fibres élastiques dans une matrice inélastique. (b) Modèle composite triphasé correspondant pour l'approche d'homogénéisation par champs moyens. Il convient de noter que  $\|\epsilon_2^{in}\| > \|\epsilon_0^{in}\|$ .

La méthode à champs moyens choisie pour cette étude est le schéma modifié de Mori-Tanaka combiné à une analyse par champs de transformation (TFA), initialement proposée par [5]. La méthode TFA est basée sur la séparation entre la déformation macroscopique élastique  $\bar{\epsilon}$  et celle inélastique  $\bar{\epsilon}^{in}$ . La contrainte macroscopique est donc exprimée comme suit

$$\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}} : (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^{in}), \quad (1)$$

où  $\bar{\mathbb{C}}$  désigne le module élastique macroscopique. La décomposition additive de la déformation totale macroscopique permet de travailler directement sur la déformation inélastique de l'enrobage, en la modifiant par rapport à celle de la matrice.

### 3. Cadre théorique

Dans cette étude, le schéma de Mori-Tanaka combiné à la TFA est modifié pour intégrer un pseudo-enrobage entre la fibre et la matrice. Cette phase supplémentaire a pour but de recueillir la forte concentration des champs de déformation inélastique autour des fibres observés sur les simulations en EF. La matrice et l'enrobage sont modélisés par la même loi de comportement non linéaire et ont

les mêmes propriétés ( $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_2$ ). Cependant, la déformation inélastique moyenne dans l'enrobage  $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{in}$  est amplifiée par rapport à celle de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$  à l'aide d'un tenseur de correction  $\mathbb{Y}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^{in} = \mathbb{Y} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}. \quad (2)$$

Le but de ce tenseur de correction est de garantir que la déformation inélastique totale dans l'ensemble matrice/enrobage puisse fournir le comportement macroscopique correct du composite. Pour les composites aux fibres infiniment longues dont les phases sont isotropes, la méthode proposée nécessite 4 paramètres. Le premier est le ratio  $\phi$  qui dépend de la fraction volumique de fibres  $c_1$  et de celle des enrobages  $c_2$  :  $\phi = \frac{V_1}{V_1+V_2}$ . Les trois autres paramètres sont les composantes du tenseur de correction  $\mathbb{Y}$ , à savoir  $\gamma^N$ ,  $\gamma^{ST}$ ,  $\gamma^{SL}$  (3),

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} \gamma^N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{ST} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{SL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{SL} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Il convient de noter que pour des fibres orientées dans la troisième direction,  $\mathbb{Y}(3,3)$  est supposé égal à un. En effet, pour un chargement appliqué dans le sens longitudinal des fibres, une homogénéisation par champs moyens classique sans enrobage et une homogénéisation par champs complets donnent des résultats très proches (réponse quasiment élastique).

Le VER considéré est en fait modélisé par trois phases distinctes : la matrice (indice 0), les fibres (indice 1) et les enrobages de fibres (indice 2). Les équations constitutives régissant la loi de comportement globale sont regroupée dans Tab. 1 [3], avec

- $c_r$  la fraction volumique de la  $r^{ième}$  phase,
- $\mathbb{I}$  le tenseur d'identité symétrique,
- $\mathbb{S}(\mathbb{C}_0)$  le tenseur d'Eshelby qui dépend des propriétés de la matrice (tenseur de rigidité de la matrice  $\mathbb{C}_0$ ), ainsi que la géométrie de la fibre,
- $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = c_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 + c_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + c_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2$  la déformation macroscopique moyenne sur le VER.

Opérateurs	Equations
Tenseurs d'interaction élastiques	$\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_2 = \mathbb{I}$ $\mathbb{T}_1 = [\mathbb{I} + \mathbb{S}(\mathbb{C}_0) : \mathbb{C}_0^{-1} : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_0)]^{-1}$
Tenseurs de concentration élastiques	$\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_2 = [(c_0 + c_2)\mathbb{I} + c_1\mathbb{T}_1]^{-1}$ $\mathbb{A}_1 = \mathbb{T}_1 : \mathbb{A}_0$
Déformations	$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbb{A}_0 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbb{A}_0 : [c_1\mathbb{T}_1 : \mathbb{S}(\mathbb{C}_0) + c_2\mathbb{S}(\mathbb{C}_0) : (\mathbb{I} - \mathbb{Y})] : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbb{T}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbb{T}_1 : \mathbb{S}(\mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbb{S}(\mathbb{C}_0) : (\mathbb{I} - \mathbb{Y}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$
Contrainte dans l'enrobage	$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbb{C}_0 : [\mathbb{I} - \mathbb{S}(\mathbb{C}_0)] : [\mathbb{I} - \mathbb{Y}] : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$
Contrainte macroscopique	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = c_0\boldsymbol{\sigma}_0 + c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2\boldsymbol{\sigma}_2$

Table 1: Résumé des équations constitutives du modèle de Mori-Tanaka combiné à la TFA intégrant un pseudo-enrobage

La déformation inélastique de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{in}$  ainsi que sa contrainte sont obtenues à partir de la loi de comportement correspondante, via une procédure itérative.

Il convient de noter que la technique TFA permet de calculer les tenseurs d'interaction et de concentration qu'une seule fois, lors d'une analyse préliminaire.

#### 4. Stratégie d'identification

Dans cette étude, le modèle constitutif formulé précédemment est appliqué pour décrire le comportement de composites constitués d'une matrice élastoplastique ou viscoélastique-viscoplastique renforcée de longues fibres de verre élastiques. Dans le cas de la matrice élastoplastique, les paramètres matériau sont ceux utilisés dans l'exemple de [1]. Pour la matrice viscoélastique-viscoplastique, les paramètres représentent le comportement d'un polymère. Le choix de ces matériaux sert à illustrer la nécessité de modifier l'approche micromécanique, car les prédictions dérivées de la méthode classique de Mori-Tanaka combinée à la TFA sont très rigides et différentes des résultats de référence par simulations EF.

Les paramètres sont optimisés à partir de trois essais uni-axiaux en charge/décharge: traction transversale (1-1), cisaillement dans le plan (1-2) et cisaillement hors du plan (1-3). Chaque composante du tenseur de correction  $\mathbb{Y}$  peut être identifiée indépendamment sur chacune des trois directions de chargement (Fig. 2). Concrètement, plus la zone de concentration de la déformation plastique autour

des fibres est grande, plus la valeur de la composante tensorielle correspondante est élevée.

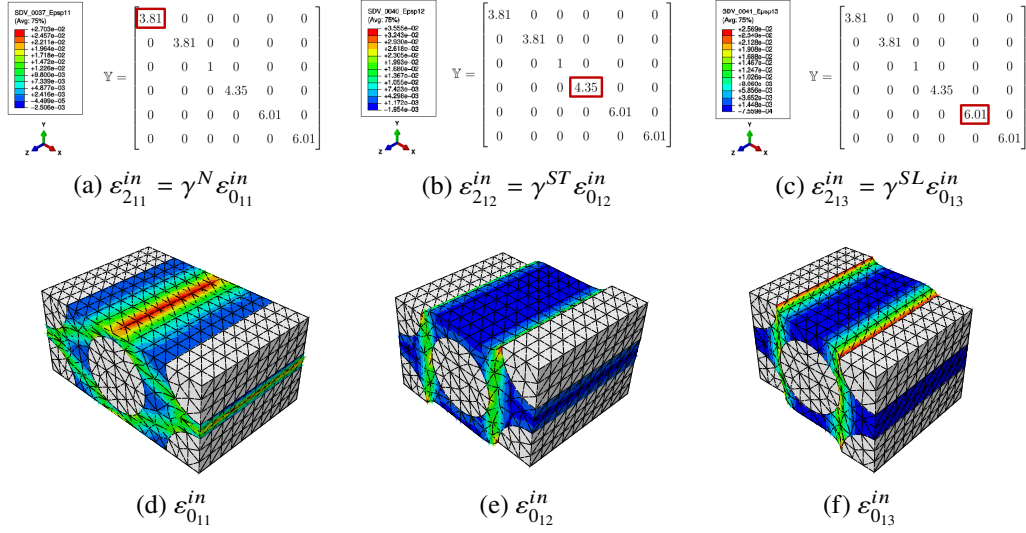


Figure 2: Comparaison entre la taille de la zone de concentration de la déformation inélastique dans la matrice  $\varepsilon_0^{in}$  et la valeur de chaque composante du tenseur de correction  $\mathbb{Y}$ , pour un composite élastoplastique renforcé par 50% de fibres longues dirigées dans la direction z, pour trois chargements différents: traction transversale (2d), cisaillement dans le plan (2e) et cisaillement hors du plan (2f).

## 5. Identification et validation

Dans les Figs. 3-6, les résultats obtenus par trois modèles différents (le modèle d'homogénéisation par champs moyens classique, le modèle d'homogénéisation par champs moyens modifié pour tenir compte du pseudo-enrobage, et le modèle d'homogénéisation par champs complets de référence) sont comparés.

### 5.1. Composites élastoplastiques

La Fig. 3 illustre les réponses contrainte-déformation à une traction transverse exercée sur des composites renforcés par trois différentes fractions volumiques de fibres (10%, 30% et 50%) et utilisées pour l'identification. Elle montre la capacité du nouveau modèle à estimer correctement le comportement élastoplastique de composites pour une large gamme de fractions volumiques de fibres.

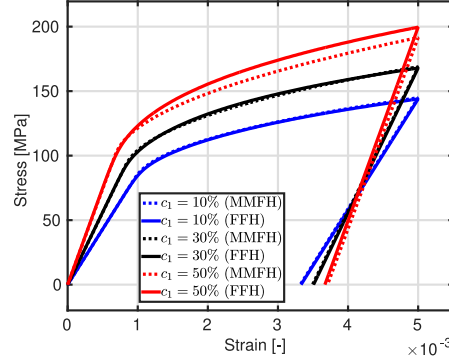


Figure 3: Simulations de tractions transverses en charge/décharge sur des composites élastoplastiques renforcés par différentes fractions volumiques de fibres: 10%, 30%, et 50% (identification). Comparaison entre l'homogénéisation par champs moyens modifiée (MMFH) et l'homogénéisation par champs complets de référence (FFH).

Par ailleurs, pour démontrer que le modèle proposé est également capable de prédire les réponses microscopiques de composites non linéaires, les champs de déformation moyens par phase sont illustrés dans la Fig. 4, pour un composite renforcé de 50% de fibres.

La simulation de la Fig. 5 valide le modèle en soumettant le composite élastoplastique à une traction transverse (indice 11) combinée à un cisaillement dans le plan (indice 12) de manière non proportionnelle, suivant un trajet non-monotone (Fig. 5)

### 5.2. Composites viscoélastiques-viscoplastiques

Les simulations illustrées dans la Fig.6 sont identiques à celle présentée dans la sous-section précédente à un point près. Elles comprennent une étape supplémentaire (3<sup>ième</sup> étape) durant laquelle les contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  diminuent lorsque  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{12}$  sont maintenues constantes. Cette étape met en exergue la capacité du modèle proposé à décrire correctement la relaxation des contraintes à long terme. De plus, le trajet de chargement complexe est appliqué à des vitesses de déformation relativement éloignées afin de mettre en avant l'effet de la vitesse dû à la rhéologie du matériau (viscoélasticité et viscoplasticité).

## 6. Conclusions et perspectives

Dans cet article, une version modifiée d'une stratégie multi-échelles à champs moyens, utilisant le cadre de la TFA et le schéma de Mori-Tanaka, a été pro-



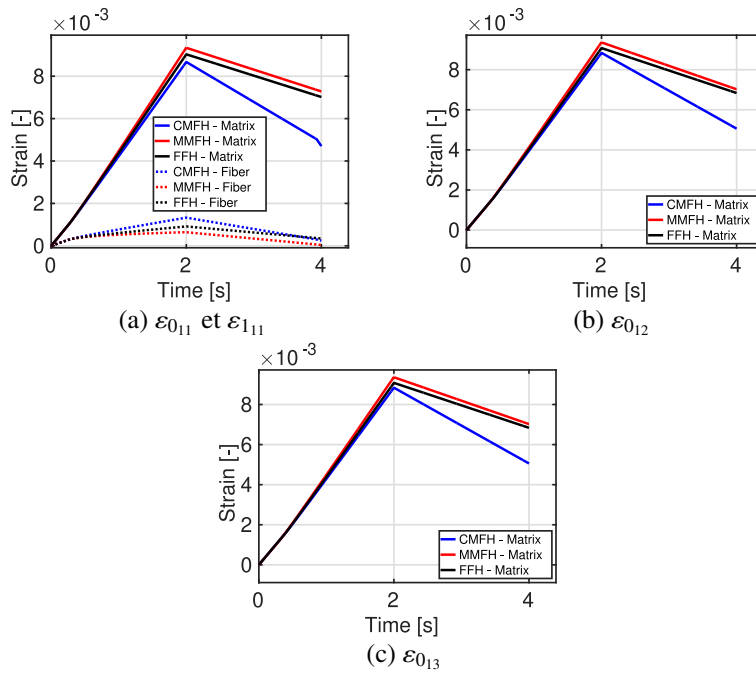
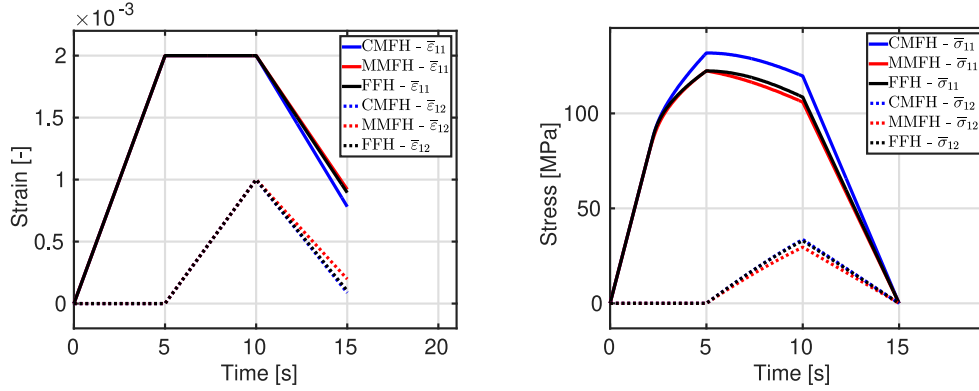


Figure 4: Simulations pour un composite élastoplastique renforcé de 50% de fibres longues. Déformation moyenne de la matrice ou de la fibre pour trois chargements : (a) traction transversale, (b) cisaillement dans le plan et (c) cisaillement hors plan. Comparaison entre l'homogénéisation par champs moyens classique (CMFH), l'homogénéisation par champs moyens modifiée (MMFH) et l'homogénéisation par champs complets de référence (FFH). La déformation de la phase "matrice" du modèle modifié considère la déformation moyenne du système matrice/enrobage.

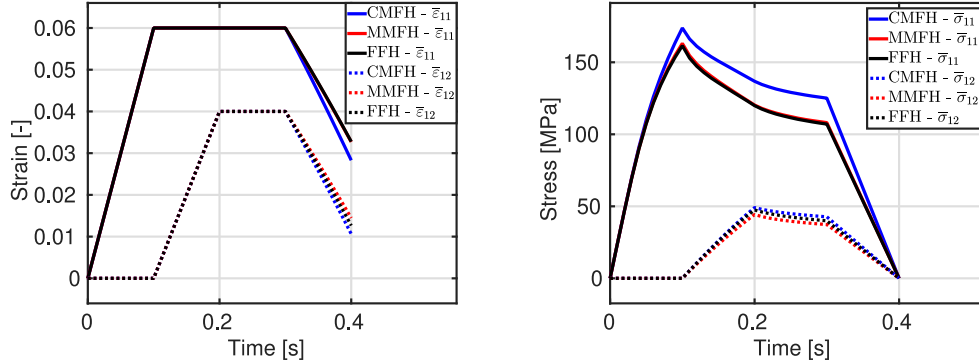


(a) Déformation appliquée ( $\bar{\varepsilon}_{11}$  et  $2\bar{\varepsilon}_{12}$ ) vs (b) Réponse en contrainte ( $\bar{\sigma}_{11}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$ ) vs temps temps

Figure 5: Simulation d'un chargement multi-axial non-proportionnel combinant une traction transverse (1-1) avec un cisaillement dans le plan (1-2) sur un composite élastoplastique renforcé de 20% de fibres longues. Comparaison entre l'homogénéisation par champs moyens classique (CMFH), l'homogénéisation par champs moyens modifiée (MMFH) et l'homogénéisation par champs complets de référence (FFH).

posée pour prédire le comportement général des composites élastoplastiques ou viscoélastiques-viscoplastiques renforcés de fibres longues. Motivée par les observations issues des calculs à champs complets dans les VERs, un pseudo-enrobage entre la matrice et la fibre a été ajouté afin de prendre en compte la forte concentration de déformation inélastique autour des fibres.

Le modèle a été identifié et largement validé par rapport à des simulations par éléments finis dans des VERs, sous des trajets de charge/décharge et des chargements multi-axiaux non proportionnels et non monotones. Les principaux avantages de cette méthode sont les suivants. Premièrement, le petit nombre de paramètres à identifier, à savoir trois paramètres pour la matrice non linéaire renforcée par des fibres cylindriques infiniment longues, rend la méthode facile à mettre en œuvre. De plus, les paramètres identifiés sont valables pour une large gamme de fractions volumiques de renforts, ce qui permet au modèle d'être adopté rapidement dans les études paramétriques. Il convient aussi bien aux comportements indépendants et dépendants de la vitesse de déformation. En outre, l'approche multi-échelles proposée permet de prédire l'effet de vitesse. Un avantage supplémentaire important de la stratégie présentée est qu'elle prédit à la fois les réponses macroscopiques et les réponses microscopiques moyennées dans chaque phase du composite. Enfin, elle se trouve être un bon compromis entre la



(a) Déformation appliquée ( $\bar{\varepsilon}_{11}$  et  $2\bar{\varepsilon}_{12}$ ) vs (b) Réponse en contrainte ( $\bar{\sigma}_{11}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$ ) vs temps

Figure 6: Simulation d'un chargement multi-axial non-proportionnel combinant une traction transverse (1-1) avec un cisaillement dans le plan (1-2) sur un composite viscoélastique-viscoplastique renforcé de 20% de fibres longues, aux vitesses de déformation  $\dot{\varepsilon}_{11} = 0.6 \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{\varepsilon}_{12} = 0.4 \text{ s}^{-1}$ . Comparaison entre l'homogénéisation par champs moyens classique (CMFH), l'homogénéisation par champs moyens modifiée (MMFH) et l'homogénéisation par champs complets de référence (FFH).

précision des prévisions des approches par champs complets utilisant les éléments finis dans les VERs et la rapidité de calcul des approches par champs moyens. La réduction significative des coûts de calcul est un avantage essentiel pour les applications industrielles structurelles.

En ce qui concerne les perspectives, les travaux en cours peuvent également être adoptés dans le cas de composites à fibres courtes, en considérant les rapports diamètre/longueur appropriés. Par ailleurs, l'approche multi-échelles peut être étendue aux composites subissant des mécanismes d'endommagement (endommagements matriciels et/ou interfaciaux) en plus du comportement viscoélastique-viscoplastique.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent associer le partenaire industriel de ce projet, à savoir l'entreprise Valeo.

## Références

## References

- [1] Chaboche, J.-L., Kanoute, P., 2003. Sur les approximations « isotrope » et « anisotrope » de l'opérateur tangent pour les méthodes tangentés incrémentale et affine. *C. R. Mécanique* 331, 857–864.
- [2] Chaboche, J.-L., Kanoute, P., Roos, A., 2005. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International Journal of Plasticity* 21, 1409–1434.
- [3] Chatzigeorgiou, G., Meraghni, F., 2019. Elastic and inelastic local strain fields in composites with coated fibers or particles: Theory and validation. *Mathematics and Mechanics of Solids*, in press.
- [4] Doghri, I., Ouair, A., 2003. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International Journal of Solids and Structures* 40, 1681–1712.
- [5] Dvorak, G.-J., 1992. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 437, 311–327.