



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/18004>

#### **To cite this version :**

Régis KUBLER - MODELISATION DES CONTRAINTES RESIDUELLES - 2020

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# MODELISATION DES CONTRAINTES RESIDUELLES

Régis KUBLER <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Arts et Métiers Sciences et Technologies, MSMP EA7350, 2 cours des Arts et Métiers, 13617 Aix-en-Provence, France. regis.kubler@ensam.eu

**Mots-clés** : incompatibilités de déformation ; eigenstrain ; gradient de contraintes ; simulation numérique

## Résumé

*Dans cette partie de cours, nous présentons la modélisation des contraintes résiduelles à partir d'une déformation libre de contraintes (« Eigenstrain »). Pour rendre la déformation totale compatible, cette « eigenstrain » est accommodée par une déformation élastique. A partir des équations de la mécanique des milieux continus (comportement, équilibre, compatibilités, conditions aux limites de la structure), nous regardons comment générer un profil de contraintes résiduelles dans une structure. Différentes approches de simulation des contraintes résiduelles sont présentées. Ces simulations peuvent être un point de départ d'autres simulations devant tenir compte des contraintes résiduelles initiales. Nous présentons aussi des travaux et méthodes pour descendre les échelles jusqu'à l'échelle de la microstructure.*

## 1 Introduction

Des moyens expérimentaux de plus en plus avancés ont conduit à une connaissance de plus en plus fine et précise des matériaux et des mécanismes physiques sous jacents à des phénomènes mécaniques macroscopiques. Les contraintes résiduelles font partie des phénomènes mécaniques observables indirectement dont la description et la perception nécessite des outils de modélisation. Les contraintes résiduelles ou "internes" sont les contraintes existant dans un matériau ou une structure sans sollicitation externe. Par définition, elles sont autoéquilibrées. Les contraintes résiduelles se manifestent aux différentes échelles du "mécanicien" tant que la notion de contrainte reste valable.

Par ailleurs, il existe de nombreux traitements de surface générant des contraintes résiduelles de compression en surface et sous surface des matériaux, qui améliorent la durée de vie en fatigue des composants mécaniques. On peut citer les traitements thermiques superficielles, les traitements thermo-chimiques et les traitements mécaniques par écrouissage. Les procédés d'élaboration, de mise en forme, d'enlèvement de matière, d'assemblage et de fabrication additive confèrent également aux matériaux et structures des états mécaniques résiduels qu'il est opportun de maîtriser. Pour ces différents traitements et procédés, il est important de comprendre l'origine des contraintes résiduelles, c'est à dire les mécanismes générant les déformations élastiques avec lesquelles la contrainte est "calculée".

Des outils numériques de simulation "explicite" permettent de prédire l'ensemble des champs résiduels à la fin du procédé ou d'une sollicitation complexe et multiphysique. On propose ici d'aborder plutôt des méthodes de prise en compte "implicite" des contraintes résiduelles. Ces méthodes deviennent particulièrement pertinentes et adaptées si des informations détaillées sur les procédés, l'histoire du matériau ou sur le comportement thermomécanique sont manquantes.

Dans cette partie de cours, nous présentons la modélisation de la génération des contraintes résiduelles à partir d'une déformation libre de contrainte, appelée souvent "Eigenstrain". A partir des équations de la mécanique des milieux continus, nous regardons comment générer un profil de contrainte résiduelle dans une structure. Les méthodes expérimentales de détermination des contraintes mènent les modélisateurs à trouver la forme d'"eigenstrain" ayant généré cette contrainte. Ces méthodes analytiques s'implémentent dans des codes de calculs pour générer des gradients de contraintes résiduelles dans les structures, qui peut être un point de départ d'autres simulations devant tenir compte des contraintes résiduelles. Nous présentons aussi des pistes pour descendre les échelles jusqu'à la microstructure.

La section 2 présente la notion d'"eigenstrain" ou de déformation libre de contraintes avec un rappel des équations classiques de la mécanique.

Dans la section 3, à partir des équations de la mécanique des milieux continus, on détermine la relation

"bien utile" entre le profil d'"eigenstrain" et le profil de contraintes résiduelles. Des applications à des traitements de surface présentant des gradients en profondeur (i.e. profils) tels que le grenailage de précontrainte permettent d'illustrer les méthodes. La méthode thermique fictive pour générer des profils de contraintes résiduelles est également présentée.

La section 4 présente des méthodologies analytiques et numériques pour simuler les contraintes résiduelles résultant de traitements de surface mécaniques. Certaines techniques pour la modélisation de contraintes résiduelles dans un polycristal numérique sont également présentées sans toutefois modéliser le procédé dans sa globalité.

## 2 Compatibilité des déformations - notion d'"Eigenstrain"

Il existe plusieurs exemples élémentaires pour aborder la modélisation de contraintes résiduelles issues d'une incompatibilité de déformations. On peut citer la poutre biencastrée avec chargement uniaxial élastoplastique, le frettage de tubes, le bilame, la flexion élastoplastique ou le composite élastoplastique. [Korsunsky 2017] présente certains de ces exemples qui permettent aisément d'assimiler la notion de compatibilité des déformations. L'origine des contraintes est une déformation inélastique devant se rendre généralement compatible par une accommodation élastique générant les contraintes résiduelles ou internes, restantes en l'absence de chargement. Ces problèmes font implicitement appel aux "Eigenstrain". La détermination de la forme de l'"eigenstrain" est souvent une solution plus directe pour obtenir les états mécaniques résiduels en s'affranchissant du travail "laborieux" (mais souvent nécessaire) de détermination de l'évolution de chaque grandeur lors d'une sollicitation ou lors d'un procédé.

### 2.1 Compatibilité des déformations

Le tenseur de déformation (totale),  $\varepsilon$ , dérive du vecteur déplacement  $\vec{u}$  et dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), il s'exprime par :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \underset{\sim}{grad} \vec{u} + \underset{\sim}{grad}^T \vec{u} \right) \quad (1)$$

La déformation totale doit satisfaire la relation de compatibilité. Ces équations définissent les conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation totale, assurant l'unicité des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (2)$$

Une forme plus compacte passe par l'utilisation du tenseur de compatibilité :

$$\text{Inc}(\varepsilon) = \text{rot rot}(\tilde{\varepsilon}) = 0 \quad (3)$$

L'équation d'équilibre sur les contraintes d'un élément de volume de masse volumique  $\rho$ , avec une force volumique  $\vec{F}$  soumis à un déplacement  $\vec{u}$ , s'écrit :

$$\text{div}(\tilde{\sigma}) + \vec{F} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (4)$$

Le comportement élastique linéaire des matériaux exprime une relation entre la contrainte et la déformation élastique (Loi de Hooke) telle que :

$$\tilde{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \quad (5)$$

où  $C$  est un tenseur d'ordre 4 représentant le module d'élasticité du matériau.

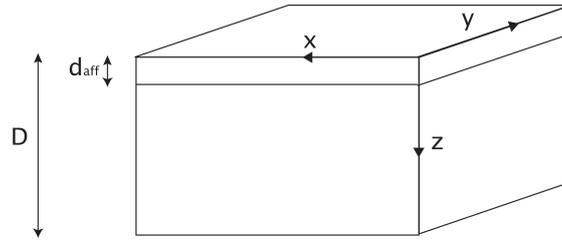


Figure 1 – Massif semi infini où la profondeur affectée est négligeable devant les autres dimensions ( $d_{aff} \ll D$ ).

## 2.2 Théorie des "eigenstrains" ou des déformations libres de contrainte

Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), la déformation totale est additive et s'exprime par :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^* \quad (6)$$

où  $\varepsilon^e$  est le tenseur de déformation élastique et  $\varepsilon^*$  est le tenseur de déformation inélastique. Le tenseur de déformation inélastique peut avoir plusieurs natures : thermique avec l'expansion thermique  $\varepsilon^{th}$ , plastique  $\varepsilon^p$  avec prise en compte d'un écrouissage, de transformation  $\varepsilon^{Tr}$  pour les changements microstructuraux, volumique  $\varepsilon^V$  pour les gonflements, ...

La déformation élastique seule (traction dans le domaine élastique et décharge élastique) ne génère pas de contrainte résiduelle. Par ailleurs, un essai de traction homogène en plasticité ne va pas générer de contraintes résiduelles d'ordre 1 dans l'éprouvette.

Le terme "Eigenstrain" et la notation  $\varepsilon^*$  proposée par Mura (1982) provient d'une traduction d'un concept développé par Reissner (1931) de l'allemand "Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen" [Reissner 1931]. Une traduction française est "déformation libre de contraintes". Le problème de l'inclusion d'Eshelby [Eshelby 1957] utilise également la notion d'"Eigenstrain" pour la détermination des champs mécaniques autour d'une inclusion. Les travaux de [Mura 1982] s'attachent à déterminer les champs de contraintes correspondant à une certaine distribution d'"eigenstrain".

La reconstruction des "eigenstrains" est une étape importante pour modéliser les contraintes résiduelles. Plusieurs approches de type éléments finis ont ensuite été développées pour la résolution du problème : par exemple celle proposée par Y. Ueda [Ueda 1975, Ueda 1979] et intitulée "Inherent Strain Method", ou encore celle de M.R. Hill [Hill 1996, Hill 1998] intitulée "Localized Eigenstrain Method". L'application de ces méthodes était alors essentiellement destinée à des structures soudées, et dont la géométrie demeurait suffisamment simple pour permettre la mesure expérimentale des eigenstrains.

## 3 Contraintes résiduelles et équations de la mécanique

### 3.1 Relation entre contraintes résiduelles et "eigenstrain" pour un massif semi-infini

On considère un massif semi-infini comme présenté sur la figure 1 qui est soumis à un traitement de surface engendrant un profil de contraintes résiduelles. La profondeur affectée par les "eigenstrain" résultant d'un traitement ( $d_{aff}$ ) est négligeable comparée aux autres dimensions. On fait l'hypothèse que le traitement affecte uniformément la surface. Dans le cas du massif semi-infini avec une surface plane, les contraintes et déformations résiduelles ne dépendent que de la profondeur  $z$ . Les déformations et contraintes de cisaillement sont supposées nulles. Le comportement est supposé isotrope à chaque profondeur  $z$ .

Dans le cadre HPP, la déformation totale  $\varepsilon(z)$  à une profondeur  $z$  se décompose additivement en une déformation libre de contraintes ("eigenstrain")  $\tilde{\varepsilon}^*(z)$  et une déformation élastique  $\tilde{\varepsilon}^e(z)$  tel que :

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}^e(z) + \tilde{\varepsilon}^*(z) \quad (7)$$

Dans le cas d'un traitement par déformation plastique, l'"eigenstrain" est une déformation plastique  $\varepsilon^p(z)$ . Dans le cas de transformations métallurgiques, une composante volumique et déviatorique est à considérer :  $\tilde{\varepsilon}^*(z) = \varepsilon^p(z) + \varepsilon^v(z)$

Les déformations élastiques sont la source des contraintes, liées par la loi de Hooke pour un comportement isotrope :

$$\tilde{\varepsilon}^e(z) = \frac{1 + \nu(z)}{E(z)} \tilde{\sigma}(z) - \frac{\nu(z)}{E(z)} \cdot Tr(\tilde{\sigma}(z)) \cdot I \quad (8)$$

$E(z)$  et  $\nu(z)$  étant respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson à une profondeur  $z$ . La déformation totale satisfait l'équation de compatibilité (2).

Pour un traitement uniforme de la surface, les grandeurs mécaniques ( $\Psi$ ) ne dépendent pas de la position  $(x, y)$  :

$$\forall \Psi, \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

En considérant une symétrie plane ( $\sigma_{xx}(z) = \sigma_{yy}(z)$ ), le tenseur des contraintes résiduelles s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\sigma}(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(z) & 0 & \sigma_{xz}(z) \\ 0 & \sigma_{xx}(z) & \sigma_{yz}(z) \\ \sigma_{zx}(z) & \sigma_{zy}(z) & \sigma_{zz}(z) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Dans l'hypothèse quasi-statique sans force de volume, les équations d'équilibre (4) permettent d'écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}(z)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yz}(z)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{zz}(z)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

qui conduit à :

$$\sigma_{xz}(z) = C_1 ; \sigma_{yz}(z) = C_2 ; \sigma_{zz}(z) = C_3 \quad (12)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$  sont des constantes à déterminer.

Les conditions aux limites permettent de déterminer ces constantes. A la surface ( $z = 0$ ) de normale unitaire  $\vec{n}$ , on peut écrire :

$$\tilde{\sigma}(z) \cdot \vec{n} = 0 \quad (13)$$

avec  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y,z}$  ce qui permet de calculer les constantes :  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  Le tenseur des contraintes résiduelles se réduit donc à la forme suivante :

$$\tilde{\sigma}(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(z) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

En injectant Eq. (14) dans les équations (7) et (8), la déformation totale est obtenue :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(z) &= \frac{1 - \nu(z)}{E(z)} \sigma_{xx}(z) + \varepsilon_{xx}^*(z) \\ \varepsilon_{zz}(z) &= \frac{-2\nu(z)}{E(z)} \sigma_{xx}(z) + \varepsilon_{zz}^*(z) \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation de compatibilité (2) permet d'écrire :

$$\varepsilon_{xx,zz}(z) = 0 \quad (16)$$

qui donne la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx}(z) = A \cdot z + B \quad (17)$$

$A$  et  $B$  étant des constantes.

La déformation totale doit prendre une valeur finie en tout point même pour  $z \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $A$  est égal à zéro. En considérant qu'il n'y a pas d'"eigenstrain" dans le coeur de la pièce ( $z \rightarrow \infty$ ) où le matériau n'est plus affecté par le traitement,  $B$  est également égal à zéro. Dans le cas d'un massif semi-infini,  $\varepsilon_{xx}(z) = 0$  et selon l'équation (15), les contraintes résiduelles sont liées à l'"eigenstrain" par la relation :

$$\varepsilon_{xx}^*(z) = \frac{\nu(z) - 1}{E(z)} \sigma_{xx}(z) \quad (18)$$

L'équation (18) est utile pour l'estimation des profils d'"Eigenstrain" à partir de profils de contraintes déterminés expérimentalement (DRX, méthodes du trou, méthode de la découpe, ...).

La méthodologie a été adaptée pour la modélisation des contraintes dans une plaque infinie d'épaisseur finie  $H$ . [Ahdad 1996] et [Cochennec 2009] ont développé le modèle analytique permettant de lier déformation plastique et profil de contraintes dans le cas du grenailage de précontrainte :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^p(z) = A \cdot z + B - \frac{\sigma_{xx}(z) - \nu \cdot \sigma_{yy}(z)}{E} \\ \varepsilon_{yy}^p(z) = C \cdot z + D - \frac{\sigma_{yy}(z) - \nu \cdot \sigma_{xx}(z)}{E} \end{cases} \quad (19)$$

où les quantités  $A$  et  $C$  correspondent aux courbures dans les directions  $x$  et  $y$ , et les quantités  $B$  et  $D$  sont les allongements relatifs de la plaque dans les directions  $x$  et  $y$ . Les relations d'équilibre dans les deux directions  $x$  et  $y$  des efforts normaux et des moments fléchissant permettent de calculer ces 4 quantités. [Ahdad 1996] a également développé les équations pour le cas d'un cylindre infiniment long.

Les équations d'équilibre mécanique sur une structure sont également utilisées pour proposer des corrections analytiques des contraintes résiduelles mesurées par méthode destructive. En effet, lors des analyses de contraintes en profondeur, la technique par DRX nécessite généralement un enlèvement de matière local par polissage électrolytique. Pour plusieurs géométries et types d'enlèvement de matière, [Moore 1958] et [Castex 1984] proposent des expressions de la contrainte vraie en fonction de la contrainte mesurée. Il existe également des méthodes semi-numériques pour la correction des contraintes [Savaria 2012]. Les travaux de [Ballard 1994] ont montré l'unicité de la reconstruction des contraintes résiduelles après mesure avec enlèvement de matière.

### 3.2 Méthode thermique fictive pour la génération des contraintes

Il existe plusieurs méthodes pour introduire les "eigenstrains" dans des codes de calcul éléments finis. La plupart des codes de calcul ne disposent pas des fonctionnalités permettant d'introduire directement les "eigenstrains" dans une modélisation EF. Un moyen de reconstruction des "eigenstrains" peut être assuré indirectement via la méthode thermique fictive. Elle a été présentée par [Levers 1998] utilisée par de nombreux auteurs dont ([Benedetti 2016], [Desvignes 1987], [Renaud 2011]). La formulation peut varier dans les hypothèses permettant de calculer les coefficients d'expansion thermique fictifs. Il existe également d'autres méthodes pour générer un profil de contraintes résiduelles : méthode des pressions [Grasty 1996], méthode des chargements équivalents [VanLuchene 1995], méthode d'initialisation des contraintes [Rouhaud 1997].

La méthode thermique fictive est une méthode pour générer des contraintes résiduelles dans une pièce par l'intermédiaire d'une déformation thermique fictive, représentant l'"Eigenstrain" devant se rendre compatible par création d'un champ élastique. L'idée est de lier cette déformation thermique fictive à la

déformation plastique incompatible  $\varepsilon^P(z)$  (cas des traitements de surface mécaniques par écouissage). Le gradient de déformation plastique est généré par un chargement thermique fictif homogène  $\Delta\theta^*$ , avec des coefficients d'expansion thermique fictifs  $\alpha^*(z)$  à une profondeur  $z$ . L'objectif de la méthode est la détermination du profil  $\alpha^*(z)$ .

On considère le cas d'un massif semi-infini soumis à une variation de température  $\Delta\theta^*$ . Il y aura de la déformation plastique au delà de la limite d'élasticité  $\sigma_y$  et elle évoluera selon la loi d'écouissage. Dans le cas du comportement avec élasticité isotrope et écouissage cinématique linéaire, on peut lier le gradient de déformation plastique  $\varepsilon^P(z)$  au gradient des coefficients d'expansion thermique  $\alpha^*(z)$ . Pour rappel, la déformation totale dans le cas d'un massif semi-infini traité de manière homogène, est nulle, telle que :

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}^e(z) + \tilde{\varepsilon}^P(z) + \tilde{\varepsilon}^{th*}(z) = 0 \tag{20}$$

où  $\tilde{\varepsilon}^{th*}(z) = \tilde{\alpha}^* \Delta\theta^*$  est le tenseur des déformations thermiques fictives.

Avec la loi de Hooke,  $\tilde{\sigma}(z) = 2\mu(z) \cdot \tilde{\varepsilon}^e(z) + \lambda(z) \cdot Tr(\tilde{\varepsilon}^e(z)) \cdot I$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, la contrainte s'obtient :

$$\tilde{\sigma}(z) = 2\mu(z) \cdot (-\tilde{\varepsilon}^P(z) - \tilde{\varepsilon}^{th*}(z)) + \lambda(z) \cdot Tr(-\tilde{\varepsilon}^P(z) - \tilde{\varepsilon}^{th*}(z)) \cdot I \tag{21}$$

Pour déterminer le lien entre les coefficients d'expansion thermique fictifs et la déformation plastique, on applique le critère de plasticité type von Misès avec la contrainte (21) et un écouissage cinématique linéaire avec une pente  $C$ . Les coefficients d'expansion thermique fictifs sont déterminés par :

$$\tilde{\alpha}^*(z) = -\frac{2\mu(z) + C + K(z)}{2\mu(z) \cdot \Delta\theta^*} \cdot \tilde{\varepsilon}^P(z) \tag{22}$$

avec  $\mu$  le module de cisaillement et  $K$  tel que :

$$|K(z)| = \left| \frac{\sigma_y}{3 \cdot \varepsilon_{xx}^P(z)} \right| \tag{23}$$

On note que le tenseur de déformation thermique fictive est déviatorique à l'instar de la déformation plastique générée par le traitement de surface mécanique par écouissage.

A titre d'exemple, [Renaud 2011] a appliqué la méthode thermique fictive à la modélisation des contraintes d'un traitement thermochimique avant grenailage (Figure 2).

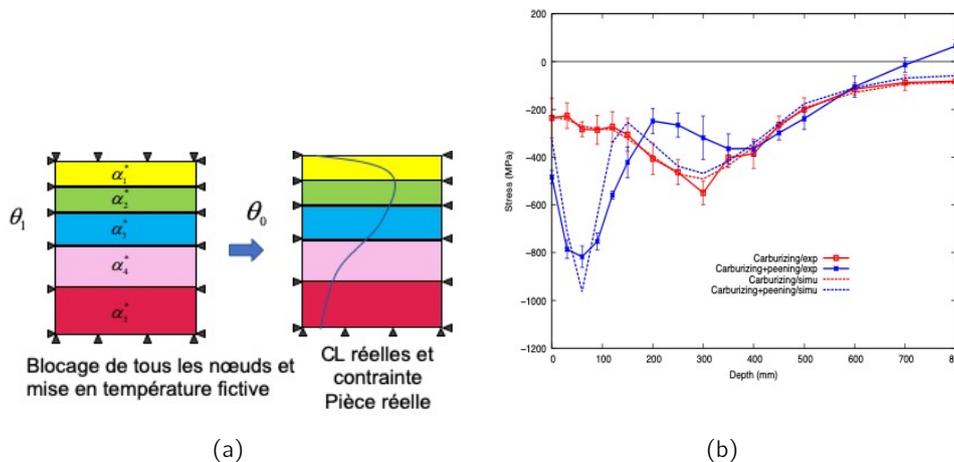


Figure 2 – (a) Méthode thermique fictive avec chauffage  $\theta_1 - \theta_0$ . (b) Application à la modélisation d'un profil de contraintes résiduelles après cémentation, puis simulation du grenailage [Renaud 2011].

## 4 Contraintes résiduelles et traitement de surface

### 4.1 Analyse élastoplastique simplifiée pour la modélisation des profils de contrainte résiduelles par grenailage

Cette approche initialement proposée par [Zarka 1976] puis approfondie par [Inglebert 1984] a pour but de prédire l'état élastoplastique stabilisé d'une structure ayant subi un chargement cyclique. Appliquée au grenailage de précontrainte, elle permet de prédire la distribution des contraintes résiduelles et des déformations plastiques dans la profondeur d'un massif. Cette méthode a été implémentée dans le logiciel PEENSTRESS pour la société MIC ou PEENTURB pour le groupe SAFRAN. Elle a été utilisée dans de nombreux travaux dont ([Guechichi 1986], [Desvignes 1987], [Khabou 1989], [Cao 1989], [Hamdane 1990], [Fathallah 1994], [Lillamand 1998], [Renaud 2011]). Les applications concernent principalement des matériaux ferritiques et des alliages de titanes avec des écrouissages simplifiés. L'application de cette méthode à d'autres matériaux doit être menée avec vigilance.

La description ci-dessous est extraite de la thèse de [Gelineau 2018] en application au grenailage de précontrainte d'une nuance Inconel.

Le chargement dû au grenailage est purement élastique et est induit par la pression de Hertz d'une bille sphérique sur un massif semi-infini. La théorie de Hertz permet de calculer le champ de contrainte élastique. La modélisation du grenailage suppose que le chargement élastique est défini à partir des composantes radiales et axiales du chargement de Hertz. Il est donné par :

$$\underset{\sim}{\Sigma}^H = \begin{bmatrix} \Sigma_{rr}^H(z) & 0 & \Sigma_{rz}^H(z) \\ 0 & \Sigma_{\theta\theta}^H(z) & 0 \\ \Sigma_{rz}^H(z) & 0 & \Sigma_{zz}^H(z) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Avec :

$$\begin{cases} \Sigma_{rr}^H(z) = P_{max} \cdot (1 + \nu_m) \cdot \left( \frac{z}{a} \cdot \arctan\left(\frac{a}{z}\right) - 1 \right) + P_{max} \cdot \left( \frac{a^2}{2(a^2 + z^2)} \right) \\ \Sigma_{\theta\theta}^H(z) = \Sigma_{rr}^H(z) \\ \Sigma_{zz}^H(z) = -P_{max} \cdot \left( \frac{a^2}{a^2 + z^2} \right) \end{cases} \quad (25)$$

où la pression maximale de Hertz  $P_{max}$  et le rayon d'impact  $a$  sont donnés par des lois analytiques en fonction des paramètres procédés (taille de bille, densité, vitesse, élasticité).

Le chargement élastique considéré  $\Sigma^{el}$  est défini par :

$$\Sigma^{el}(z) = \Sigma_{rr}^H(z) - \Sigma_{zz}^H(z) \quad (26)$$

À partir du chargement représentatif du grenailage, l'analyse élastoplastique simplifiée détermine un comportement local à partir des grandeurs globales. La réponse générale d'une structure caractérisée par la donnée des champs de contraintes, de déplacements et de déformations peut être définie au moyen des contraintes résiduelles globales et des déformations plastiques globales.

L'approche analytique utilise la similitude entre des impacts multiples et répétés dans le cadre du grenailage et un essai de traction cyclique. Pour un matériau donné, le comportement local cyclique permet d'identifier un jeu de 5 paramètres ( $P_0$ ,  $P_\infty$ ,  $\Sigma_\infty$ ,  $S_0$ ,  $S_\infty$ ) comme présenté sur la figure 3. La résolution des systèmes d'équations permettent d'obtenir les profils de contraintes et d'"eigenstrain"

$$\sigma(z) = -E_1 \cdot \left[ \frac{1}{2P_\infty \cdot (1 - \nu_1) + E_1} \cdot \left( Y_1(z) + Y_2(z) \cdot \sqrt{\frac{B_{12}}{B_{22}}} \right) \right] \quad (27)$$

$$\varepsilon^p(z) = \frac{1}{\left( B_{11} + \frac{E_1}{2(1 - \nu_1)} \right) \cdot B_{22} - B_{12}^2} \cdot \left[ B_{22} \cdot \left( Y_1(z) - \sigma(z) \right) - B_{12} \cdot Y_2(z) \right] \quad (28)$$

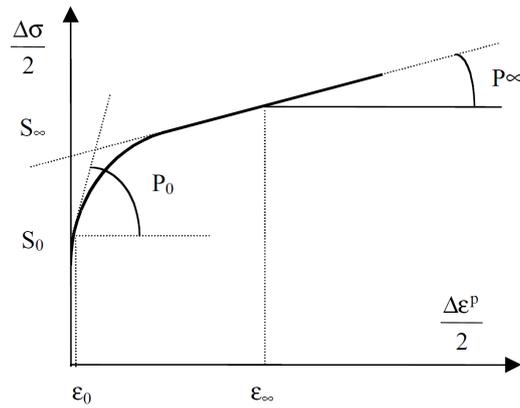


Figure 3 – Identification des paramètres matériau sur la courbe d'érouissage cyclique [Deslaef 2000]

où  $Y_1, Y_2, B_{11}, B_{12}$  et  $B_{22}$  sont des paramètres dépendant du chargement, du comportement cyclique du matériau via les paramètres d'érouissage.

En application de l'analyse élastoplastique simplifiée au grenailage de l'Inconel 718 DA, [Gelineau 2018] obtient les profils de contraintes résiduelles cohérents avec la mesure expérimentale pour deux conditions de grenailage (figure 4). L'approche permet de bien décrire la profondeur affectée et le niveau de contrainte maximal atteint.

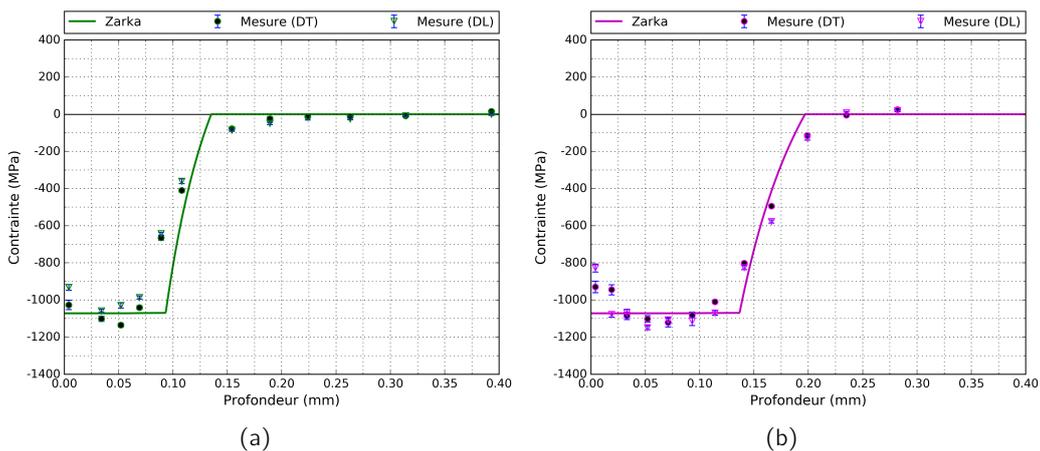


Figure 4 – Calcul du profil massif semi-infini par analyse élastoplastique simplifiée sur Inconel 718 DA

## 4.2 Approches numériques de modélisation des profils de contrainte résiduelles par grenailage

Pour des géométries complexes les approches numériques type intégration dans un code de calcul éléments finis sont particulièrement adaptées pour la modélisation des contraintes résiduelles et de déformées sur géométries complexes. Il s'agit notamment de définir les outils utilisés pour l'intégration de la méthode de reconstruction des eigenstrains dans un code de calcul EF. Basé sur les travaux de [Rouhaud 1997], cette intégration numérique dans le logiciel Abaqus est proposé dans les travaux de [Gelineau 2018] avec l'outil développé (PYGINI).

La démarche consiste à modéliser dans un code de calcul EF la géométrie de la pièce traitée, puis à introduire localement un champ de contraintes non équilibré calculé à partir du gradient de déformations plastiques qui existerait dans un massif semi-infini (supposé grenailé dans des conditions identiques à la pièce). Après un calcul statique de rééquilibrage élastique, le champ de contraintes résultant tient compte des effets de la géométrie et doit s'approcher du champ de contraintes résiduelles dans la pièce grenailée. La modélisation donne également accès à la déformée du composant après grenailage.

### 4.2.1 Relations théoriques

Le tenseur du champ de contraintes initial peut être exprimé dans un système de coordonnées local à partir de la relation d'élasticité pour un comportement isotrope :

$$\tilde{\sigma}^0 = 2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}^e + \lambda \cdot \text{tr}(\tilde{\varepsilon}^e) \cdot I \quad (29)$$

Avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé.

Comme vu dans la section 3, pour un traitement uniforme de la surface, la déformation totale est nulle. Alors il vient :

$$\tilde{\sigma}^0 = -2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}^p = \begin{bmatrix} \sigma^0(z) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^0(z) & 0 \\ 0 & 0 & -2\sigma^0(z) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Avec :

$$\sigma^0(z) = -\frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon^p(z) \quad (31)$$

Dans l'hypothèse de massif semi-infini, il existe une relation simple entre contraintes résiduelles  $\sigma$  et déformations plastiques  $\varepsilon^p$  (cf Eq. 18) :

$$\varepsilon^p(z) = \frac{\nu-1}{E} \cdot \sigma(z) \quad (32)$$

Soit après simplification de l'équation (31) à partir de l'équation (32) :

$$\sigma^0(z) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \sigma(z) \quad (33)$$

L'équation (33) donne le pseudo-profil de contraintes à implémenter dans le code de calcul EF.

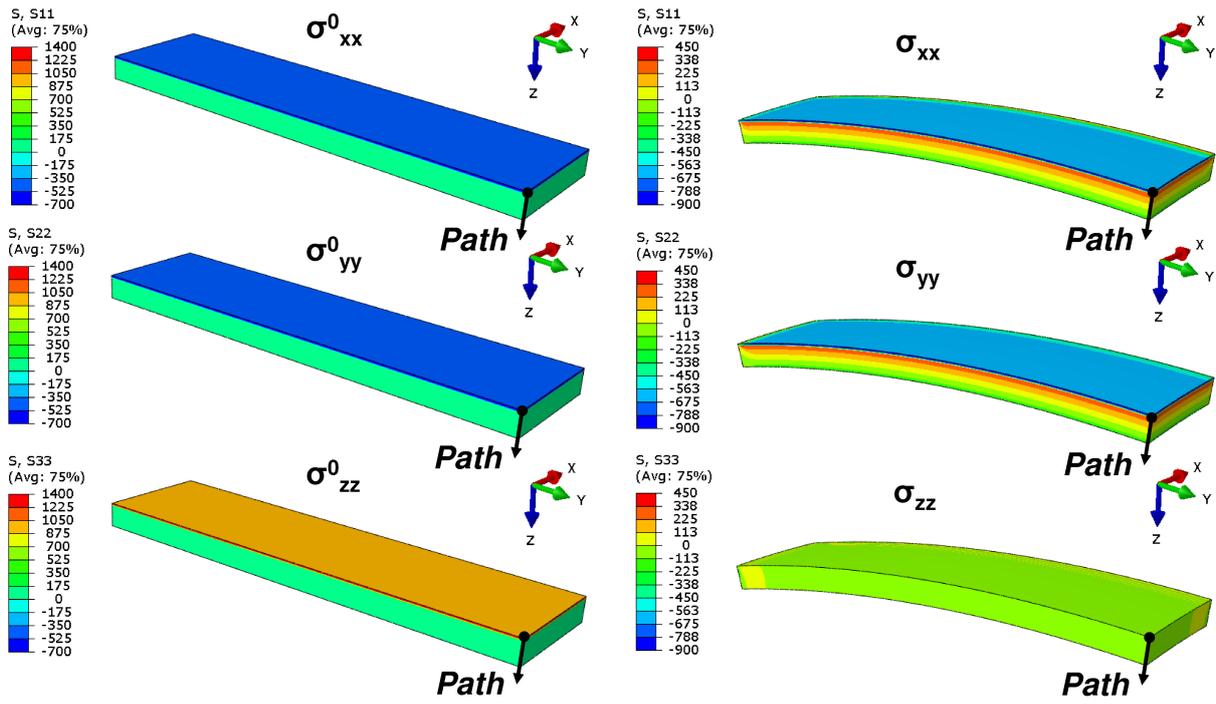
### 4.2.2 Intégration dans un code de calcul et applications au grenailage de précontrainte

Pour des géométries planes et complexes [Gelineau 2018] a implémenté ces équations dans le repère local de chaque élément via une procédure automatique sous Python (outil PYGINI) dans le logiciel Abaqus. L'application a été effectuée sur des éprouvettes planes grenillées totalement ou partiellement sur une face en prédisant les profils de contraintes résiduelles et les déformées. La figure 5 montre les champs de contraintes calculés selon (Eq. 33) et l'équilibrage mécanique après retour élastique pour les faire correspondre au profil de contraintes résiduelles mesurées.

### 4.3 Simulation des contraintes résiduelles à l'échelle de la microstructure

Des simulations complètes des procédés à l'échelle de la microstructure existent pour prendre en compte l'effet de la microstructure via la génération de microstructures numériques. Au titre du grenailage de précontrainte ou de l'indentation en lien avec les contraintes résiduelles, on peut citer les travaux de [Moreno 2017] sur la simulation EF d'impacts à plusieurs billes sur un polycristal numérique et la simulation de l'indentation d'un monocristal pour prédire les contraintes résiduelles [Breumier 2019].

Néanmoins, les approches présentées en section 3 peuvent s'adapter au comportement de matériaux multiphasés ou polycristallins pour la simulation des profils de contraintes. [Musinski 2015] ont appliqué un champ thermique fictif à un polycristal pour générer le profil de contraintes résiduelles. Les valeurs des coefficients d'expansion thermique fictifs sont déterminées par un process d'optimisation numérique pour faire correspondre le profil de contraintes simulées au profil de contraintes résiduelles expérimentale. La figure 6 présente le profil de contraintes résiduelles obtenu après optimisation des coefficients de dilatation thermique fictifs en fonction de la profondeur dans le polycristal. L'état de contrainte obtenu est autoéquilibré et permet de continuer avec des simulations d'autres chargements mécaniques pour simuler la relaxation des contraintes résiduelles dans la microstructure.



(a) Avant retour élastique : état de contraintes initial (non équilibré)

(b) Après retour élastique : état de contraintes auto-équilibré (Deformation scale factor : 10)

Figure 5 – Champs de contraintes du modèle de quart de plaque d'épaisseur 2 mm

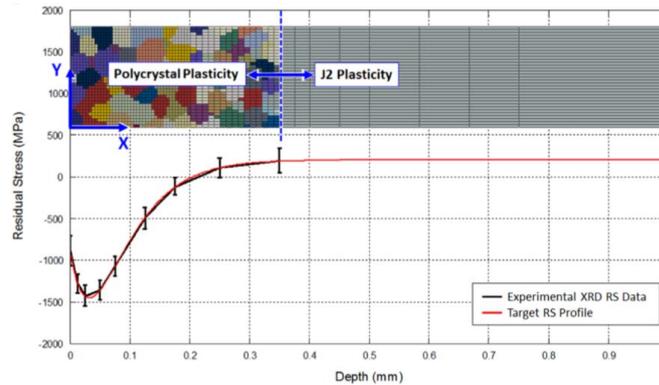


Figure 6 – Modélisation des contraintes résiduelles dans un polycristal par un champ thermique fictif.[Musinski 2015]

## 5 Conclusion

Les principaux concepts nécessaires à la reconstruction par la modélisation des contraintes résiduelles ont été présentés. On remarque que le concept d'"eigenstrain" est présent dans les différentes approches. Ces approches se veulent simples pour éviter, quand cela est possible, de modéliser l'ensemble d'un procédé ou d'une sollicitation. Ces techniques de modélisation permettent également de mieux appréhender les effets des enlèvements de matière, de découpe. Réciproquement, grâce à la modélisation, les méthodes d'enlèvement de matière ou de découpe se révèlent comme des techniques expérimentales de reconstruction des contraintes (méthode du trou, méthode de la découpe).

## Références

- [Ahdad 1996] F. Ahdad et M. Desvignes. *Contraintes résiduelles et déformations plastiques - Leurs relations mutuelles pour des pièces de géométrie simple*. Matériaux & Techniques, vol. 84, pages 46–50, 1996.
- [Ballard 1994] P. Ballard, M. Buliga et A. Constantinescu. *Reconstruction d'un champ des contraintes résiduelles à partir des contraintes mesurées sur des surfaces successives : Existence et unicité*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 319, pages 1117 – 1122, 1994.
- [Benedetti 2016] M Benedetti, V Fontanari, B Winiarski, M Allahkarami et JC Hanan. *Residual stresses reconstruction in shot peened specimens containing sharp and blunt notches by experimental measurements and finite element analysis*. International Journal of Fatigue, vol. 87, pages 102–111, 2016.
- [Breumier 2019] S. Breumier, A. Villani, C. Maurice, M. Lévesque et G. Kermouche. *Effect of crystal orientation on indentation-induced residual stress field : Simulation and experimental validation*. Materials and Design, vol. 169, page 107659, 2019.
- [Cao 1989] Wei Cao. *Adoucissement cyclique des aciers et relaxation des contraintes résiduelles de grenailage en fatigue*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1989.
- [Castex 1984] L Castex. *Redistribution des contraintes dans une plaque après enlèvement de matière*. Journée du Groupement français pour l'analyse des contraintes par diffractions des rayons X, Aix-en-Provence, France, vol. 170, 1984.
- [Cochennec 2009] Florent Cochennec. *Simulation numérique du grenailage de mise en forme pour une intégration produit-procédés en conception*. Thèse, Université de Technologie de Troyes, 2009.
- [Deslaef 2000] David Deslaef. *Modélisation numérique du grenailage de précontrainte : approche tridimensionnelle et dynamique*. Thèse, Université de Technologie de Troyes, 2000.
- [Desvignes 1987] Marc Desvignes. *Influence du grenailage de précontrainte sur la tenue en service de l'acier 35cd4*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1987.
- [Eshelby 1957] John D Eshelby. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society, vol. 241, no. 1226, pages 376–396, 1957.
- [Fathallah 1994] Raouf Fathallah. *Modélisation du procédé de grenailage incidence des billes et taux de recouvrement*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1994.
- [Gelineau 2018] Maxime Gelineau. *Etude de l'impact du grenailage sur des composants mécaniques industriels à géométrie complexe*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 2018.
- [Grasty 1996] LV Grasty et C Andrew. *Shot peen forming sheet metal : finite element prediction of deformed shape*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture, vol. 210, no. 4, pages 361–366, 1996.
- [Guechichi 1986] Hocine Guechichi. *Prévision des contraintes résiduelles dues au grenailage de précontrainte*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1986.
- [Hamdane 1990] Nidhal Hamdane. *Modélisation des contraintes résiduelles introduites par martelage dans les parois d'un tube de générateur de vapeur*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1990.
- [Hill 1996] Michael R Hill. *Determination of residual stress based on the estimation of eigenstrain*. Thèse, Stanford University, 1996.
- [Hill 1998] Michael R Hill et Drew V Nelson. *The localized eigenstrain method for determination of triaxial residual stress in welds*. ASME Publications PVP, vol. 373, pages 397–404, 1998.
- [Inglebert 1984] Geneviève Inglebert. *Analyse simplifiée des structures élasto-visco-plastiques sous chargements cycliques*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1984.
- [Khabou 1989] M Taoufik Khabou. *Modélisation du comportement et des contraintes résiduelles introduites dans un matériau soumis à un grenailage*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1989.

- [Korsunsky 2017] Alexander M. Korsunsky. *A teaching essay on residual stresses and eigenstrains*. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [Levers 1998] Andrew Levers et Alan Prior. *Finite element analysis of shot peening*. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 80, pages 304–308, 1998.
- [Lillamand 1998] Ivan Lillamand. *Evolutions d'une couche grenaillee sous sollicitations thermiques et mecaniques cas de la fatigue oligocyclique*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 1998.
- [Moore 1958] MG Moore et WP Evans. *Mathematical Correction for Stress in Removed Layers in X-Ray Diffraction Residual Stress Analysis*. *SAE Trans.* 66, pages 340–345, 1958.
- [Moreno 2017] A Castro Moreno, F Tu, M Lévesque et P Bocher. *Shot peening fem simulation : A novel approach based on crystal plasticity*. ICSP-13, 2017.
- [Mura 1982] Toshio Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Nijhoff, 1982.
- [Musinski 2015] William D. Musinski et David L. McDowell. *On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework : Application to Ni-base superalloy specimens*. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 100, pages 195 – 208, 2015.
- [Reissner 1931] H Reissner. *Eigenspannungen und eigenspannungsquellen*. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 11, no. 1, pages 1–8, 1931.
- [Renaud 2011] Pierre Renaud. *Modélisation numérique du grenailage des pièces initialement cémentées ou carbonitrurées*. Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 2011.
- [Rouhaud 1997] Emmanuelle Rouhaud, Alain Milley et Jian Lu. *Introduction of residual stress fields in finite element three-dimensional structures*. *Proceedings of the 5th International Conference on Residual Stresses*, 1997.
- [Savaria 2012] Vincent Savaria, Florent Bridier et Philippe Bocher. *Computational quantification and correction of the errors induced by layer removal for subsurface residual stress measurements*. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 64, no. 1, pages 184–195, 2012.
- [Ueda 1975] Yukio Ueda, Keiji Fukuda, Keiji Nakacho et Setsuo Endo. *A new measuring method of residual stresses with the aid of finite element method and reliability of estimated values*. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, vol. 1975, no. 138, pages 499–507, 1975.
- [Ueda 1979] Yukio Ueda, Keiji Fukuda et Masayuki Tanigawa. *New measuring method of three dimensional residual stresses based on theory of inherent strain (welding mechanics, strength & design)*. *Transactions of JWRI*, vol. 8, no. 2, pages 249–256, 1979.
- [VanLuchene 1995] RD VanLuchene, J Johnson et RG Carpenter. *Induced stress relationships for wing skin forming by shot peening*. *Journal of materials engineering and performance*, vol. 4, no. 3, pages 283–290, 1995.
- [Zarka 1976] Joseph Zarka. *Non-destructive testing method for determining a body's mechanical properties and stresses*. US Patent 3-969-928, 1976.