



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/11997>

#### **To cite this version :**

George CHATZIGEORGIOU, Yves CHEMISKY, Francis PRAUD, Fodil MERAGHNI -  
Modélisation multi-échelle des composites tissés à matrice thermoplastique sous chargements cycliques non proportionnels - 2017

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)





## Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>  
Handle ID: [.http://hdl.handle.net/null](http://hdl.handle.net/null)

### To cite this version :

Francis PRAUD, George CHATZIGEORGIOU, Yves CHEMISKY, Fodil MERAGHNI -  
Modélisation multi-échelle des composites tissés à matrice thermoplastique sous chargements  
cycliques non proportionnels - 2017

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [archiveouverte@ensam.eu](mailto:archiveouverte@ensam.eu)

# Modélisation multi-échelle des composites tissés à matrice thermoplastique sous chargements cycliques non proportionnels

## *Multi-scale modelling of thermoplastic woven composites under cyclic non-proportional loadings*

F. Praud<sup>1,2</sup>, G. Chatzigeorgiou<sup>1</sup>, Y. Chemisky<sup>1</sup> et F. Meraghni<sup>1</sup>

1 : LEM3-UMR 7239 CNRS  
Arts et Metiers ParisTech  
4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz, France  
e-mail : francis.praud@ensam.eu, georges.chatzigeorgiou@ensam.eu, yves.chemisky@ensam.eu et fodil.meraghni@ensam.eu

2 : IRT Jules Verne  
Chemin du Chafault, 44340 Bougenais, France  
e-mail : francis.praud@irt-jules-verne.fr

### Résumé

Dans ce travail, un modèle micromécanique établi sur le principe de l'homogénéisation périodique est utilisé pour décrire le comportement macroscopique des composites à matrice thermoplastique sous chargements cycliques et non proportionnels. Avec l'approche proposée, le comportement macroscopique du composite est déterminé à partir d'une simulation par éléments finis d'une cellule unitaire représentative de la microstructure en intégrant les lois de comportement spécifiques des constituants : la matrice et les torons. Le comportement de la matrice est modélisé à l'aide d'une loi de comportement présentant un couplage entre viscoélasticité, viscoplasticité et endommagement ductile. Pour les torons, une loi de comportement basée à la fois sur des concepts micromécaniques et phénoménologiques est utilisée. Cette dernière permet de prendre en compte l'endommagement ainsi que l'anélasticité induit par la présence d'un réseau diffus de microfissures. Les capacités du modèle à capturer, à l'échelle macroscopique, les effets temporels induits par la matrice, couplés aux mécanismes d'endommagement intra-torons, sont démontrées à travers plusieurs exemples où le composite est soumis à des chargements cycliques et non proportionnels.

### Abstract

In this work, a micromechanical model established from the concept of periodic homogenization is utilized to describe the macroscopic behaviour of thermoplastic woven composites under cyclic and non-proportional loading conditions. With the proposed approach, the macroscopic behaviour of the composite is determined from a finite element simulation of the unit cell representative of the microstructure where the local constitutive laws of each components are integrated, namely : the matrix and the yarns. The response of the thermoplastic matrix is accounted through a constitutive law coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. For the yarns, a constitutive law based on both micromechanics and phenomenological concepts is used. The latter describes the damaged and anelastic response of the yarns induced by the presence of a diffuse microcrack network. Finally, the model capabilities to capture, at the macroscopic scale, the temporal effects induced by the matrix coupled to the intra-yarns damage mechanisms are demonstrated through several examples where the composite is subjected to cyclic and non-proportional loading conditions.

**Mots Clés :** Composites tissés, Homogénéisation Périodique, Loi de comportement, Chargements cycliques

**Keywords :** Woven composites, Periodic homogenization, Constitutive behaviour, cyclic loadings

## 1. Introduction

Le comportement cyclique et plus généralement temporel des composites à matrice thermoplastique reste aujourd'hui un verrou scientifique majeur. En effet, dans ce type de composite, la microstructure joue un rôle clé sur l'initiation et l'évolution des mécanismes d'endommagement qui interagissent avec le comportement visqueux de la matrice. Afin de rendre compte de ces phénomènes de couplage entre microstructure, rhéologie et endommagement, une approche multiéchelle basée sur une simulation à champs complets a été développée pour les composites tissés à matrice thermoplastique.

## 2. Modélisation par transition d'échelles, homogénéisation périodique

Dans cette section, un principe de modélisation par transition d'échelle basée sur le concept d'homogénéisation périodique [1, 2, 3] est présenté. Cette approche permet de construire un méta-modèle, où le comportement macroscopique du composite est déterminé à partir d'une simulation par éléments finis d'une cellule unitaire représentative de la microstructure périodique, intégrant de ce fait les lois de comportement spécifiques des constituants (la matrice et les torons dans le cas présent).

### 2.1. Cadre théorique

Un composite à microstructure périodique peut être défini par une cellule unitaire, cette dernière étant représentative du comportement macroscopique du composite. Si les dimensions de la cellule unitaire sont suffisamment petites au regard du milieu macroscopique considéré, il devient possible de considérer deux échelles : L'échelle macroscopique, définie par les coordonnées macroscopiques (ou globales)  $\bar{\mathbf{x}}$ , et l'échelle microscopique, définie par les coordonnées microscopiques (ou locales)  $\mathbf{x}$ . Ainsi, l'hypothèse de séparation d'échelle ( $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{x}$ ) permet de considérer la cellule unitaire comme un point matériel macroscopique. A l'échelle macroscopique, le matériau composite hétérogène peut être alors remplacé par un nouveau matériau homogène ayant un comportement équivalent. Les mouvements de tout point matériel macroscopique et microscopique  $\bar{M}(\bar{\mathbf{x}})$  et  $M(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ , respectivement, sont gouvernés par les équations macroscopiques et microscopiques (Tab. 1).

Equations	Macroscopique $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}$	Microscopique $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}, \forall \mathbf{x} \in V$
Equilibre	$\text{div}_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{f}_v = 0$	$\text{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$
Déformations	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{u}}) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^T(\bar{\mathbf{u}}) \right)$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{u}) \right)$
Loi constitutive	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$
Energie de déformation	$\dot{\bar{W}}_{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	$\dot{W}_{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

Tab. 1. Equations gouvernant le mouvement d'un point matériel macroscopique et microscopique.

L'étape d'homogénéisation consiste ainsi à déterminer l'opérateur  $\bar{\mathbf{F}}$  définissant le comportement macroscopique, en fonction des comportements locaux, définis par l'opérateur  $\mathbf{F}$ . Afin de rendre cela possible, il est nécessaire d'introduire une connexion entre les échelles. Le théorème de la divergence permet de définir une telle connexion entre les champs (contraintes et déformations) microscopiques et macroscopiques :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{x} dS, \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} \left( \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \right) dS. \quad (\text{Eq. 2})$$

Dans le tableau 1, les équations macroscopiques sont complétées par des conditions aux limites propres au problème traité. Pour les équations microscopiques, les conditions aux limites découlent de l'hypothèse de périodicité qui implique que, au sein de la cellule unitaire, le champ de déplacement peut se décomposer en une partie affine à laquelle s'ajoute une fluctuation périodique :

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t). \quad (\text{Eq. 3})$$

Etant donnée la nature périodique cette partie fluctuante,  $\mathbf{u}'$  prend des valeurs égales en chaque paire de points opposés sur les bords de la cellule unitaire, définissant ainsi les conditions aux limites du problème microscopique (Tab. 1). Par ailleurs, il est à noter que l'aspect périodique de  $\mathbf{u}'$  rend Eq. 2 et Eq. 3 bien compatibles entre elles. Finalement, en introduisant les conditions de périodicité Eq. 3 dans les équations microscopiques (Tab. 1) tout en considérant la connexion entre les échelles Eq. 1, il devient possible d'établir une relation entre contraintes et déformations macroscopiques, à savoir, l'opérateur  $\bar{\mathbf{F}}$ .

## 2.2. Implemantation numérique

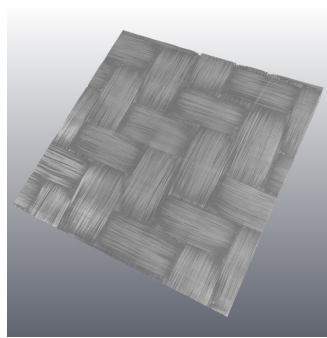
La relation entre contraintes et déformations macroscopiques (opérateur  $\bar{\mathbf{F}}$ ) est issue de la solution du problème microscopique. Ce dernier peut être aisément traité par la méthode des éléments finis, à l'aide d'un maillage de la cellule unitaire, sur lequel les conditions de périodicité de  $\mathbf{u}'$  sont appliquées :

$$\mathbf{u}'_i = \mathbf{u}'_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j). \quad (\text{Eq. 4})$$

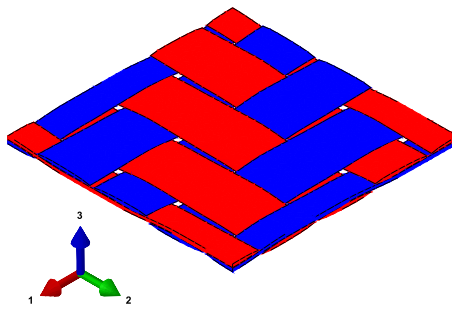
Où les indices  $i$  et  $j$  désignent chaque paire de noeuds opposés sur les frontières de la cellule unitaire. Les six composantes du tenseur des déformations macroscopiques sont introduites par le biais de degrés de liberté additionnels appelés "constraint drivers" [2]. Ces derniers sont connectés au maillage de la cellule unitaire à l'aide d'équations cinématiques obtenues à partir de Eq. 4. En utilisant ce formalisme, il est possible de démontrer que les forces duales sur les "constraint drivers" permettent de remonter directement aux contraintes macroscopiques.

## 3. Cellule unitaire

Le matériau étudié est un composite tissé en fibre de verre E avec un renfort sergé 2.2 et une matrice PA66 (Fig. 1a). La cellule unitaire a été modélisée et maillée périodiquement à l'aide du logiciel TexGen, un logiciel libre développé à l'université de Nottingham [4] (Fig. 1b).



(a) Observation de la microstructure par tomographie rayons X.



(b) Modélisation de la cellule unitaire.

Fig. 1. Composite tissé, sergé 2.2.

Les torons sont composés d'une multitude de fibres unidirectionnellement orientées. dans la modélisation proposée, les torons sont considérés comme un matériau homogène équivalent présentant des propriétés anisotropes (Sec. 4.2).

## 4. Lois de comportement locales

### 4.1. Loi de comportement de la matrice

Les polymères thermoplastiques semi-cristallins tels que le PA66 présentent un comportement dissipatif bien connu combinant des propriétés solides et fluides avec une certaine perte de raideur apparente. Le comportement de la matrice est ainsi modélisé à l'aide d'une loi constitutive formulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [5] et présente un couplage entre viscoélasticité, viscoplasticité et endommagement ductile [5, 6], comme représenté sur le schéma rhéologique Fig. 2.

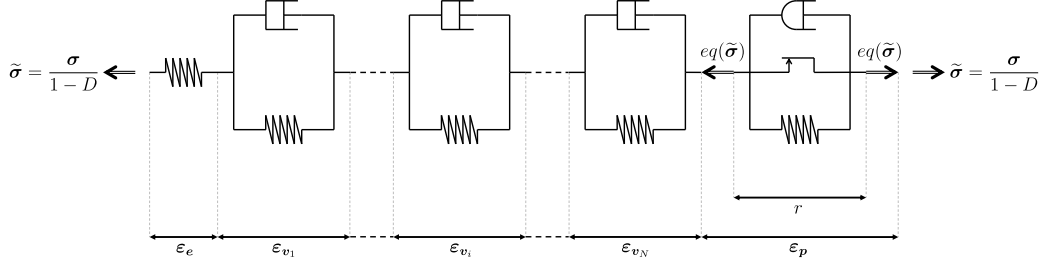


Fig. 2. Schéma rhéologique du modèle de la matrice PA66

Les lois d'état sont obtenues par dérivation thermodynamique du potentiel d'Helmholtz (Tab. 2) dont la forme est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}, r, \boldsymbol{\varepsilon}_p, D) = & \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) : (1-D)\mathbb{C}_e : \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} : (1-D)\mathbb{C}_{v_i} : \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} + \int_0^r R(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5})$$

$\mathbb{C}_e$  et  $\mathbb{C}_{v_i}$  sont des tenseurs de rigidité du quatrième ordre (classiquement définis pour les milieux isotropes compressibles) et  $R$  la fonction d'écroutissage choisie ici sous la forme d'une fonction puissance :  $R(r) = Kr^n$ , où  $K$  et  $n$  sont des paramètres matériaux. Les variables internes  $\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}$ ,  $r$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et  $D$  représentent respectivement la  $i^{eme}$  déformation viscoélastique, la déformation viscoplastique, la variable d'écroutissage et la variable d'endommagement. L'évolution des déformations viscoélastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}$  est obtenue par dérivation d'un pseudo-potential de dissipation (Tab. 2) exprimée par :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}_{v_i}; D) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{v_i} : \frac{\mathbb{V}_{v_i}^{-1}}{(1-D)} : \boldsymbol{\sigma}_{v_i}. \quad (\text{Eq. 6})$$

Les  $\mathbb{V}_{v_i}$  sont des tenseurs de viscosité du quatrième ordre (classiquement définis pour les milieux isotropes compressibles). La viscoplasticité et l'endommagement sont considérés comme étant des phénomènes couplés, les évolutions de  $r$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et  $D$  sont donc décrites par normalité d'une fonction indicatrice convexe, introduisant ainsi un multiplicateur  $\lambda$  (Tab. 2). Cette fonction est donnée par :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y; D) = \underbrace{\frac{eq(\boldsymbol{\sigma})}{1-D} - R - R_0}_{f(\boldsymbol{\sigma}, R; D)} + \underbrace{\frac{S}{(\beta+1)(1-D)} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta+1}}_{f_D(Y; D)}, \quad (\text{Eq. 7})$$

Dans l'équation ci-dessus, le terme  $f$  désigne la fonction de charge qui active le mécanisme ( $\dot{r} > 0$  si  $f > 0$ , sinon  $\dot{r} = 0$ ), cette dernière est écrite dans l'espace des contraintes effectives.  $R_0$  désigne le

seuil initial d'activation du mécanisme.  $f_D$  est un terme additif à la surface de charge permettant de prendre en compte le développement de l'endommagement en même temps que la viscoplasticité (Tab. 2).  $S$  et  $\beta$  sont les paramètres matériaux liés à  $f_D$ . L'effet visqueux est ensuite introduit en considérant une relation entre la partie positive de  $f$  et  $\dot{r}$  par le biais d'une fonction  $Q$  (Tab. 2) dont la forme est donnée par une fonction puissance :  $Q(\dot{r}) = H\dot{r}^m$ , où  $H$  et  $m$  sont des paramètres matériaux.

Variable d'état observable	Variable associé (loi d'état)	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D)\mathbb{C}_e : \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \right)$	
Variables d'état internes	Variables associés (lois d'état)	Lois d'évolution
$\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}$	$-\boldsymbol{\sigma}_{v_i} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}} = (1 - D)\mathbb{C}_{v_i} : \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} - \boldsymbol{\sigma}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{v_i} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{v_i}} = \frac{\mathbb{V}_{v_i}^{-1}}{(1 - D)} : \boldsymbol{\sigma}_{v_i}$
$r$	$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = R(r)$	$\dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}, \quad \langle f \rangle_+ = Q(\dot{r})$
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	$-\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{3 \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\dot{r}}{1 - D}$
$D$	$-Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$	$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda} = \left( \frac{Y}{S} \right)^\beta \frac{\dot{r}}{1 - D}$

Tab. 2. Matrice : Lois d'état et d'évolution.

Ce type de modélisation permet de capturer quelques effets bien connus des polymères thermoplastiques tels que la dépendance à la vitesse de sollicitation, le fluage/relaxation, la perte de rigidité ainsi que la dissipation associée et plus particulièrement quand le matériau est soumis à un chargement cyclique (Fig. 3). Une campagne d'essais spécifique sur le PA66 a été effectuée et a permis d'identifier et de valider avec succès la loi de comportement proposée pour la matrice, démontrant ainsi ses capacités à capturer un comportement mécanique induit par plusieurs mécanismes couplés entre eux et ce avec un unique jeu de paramètres.

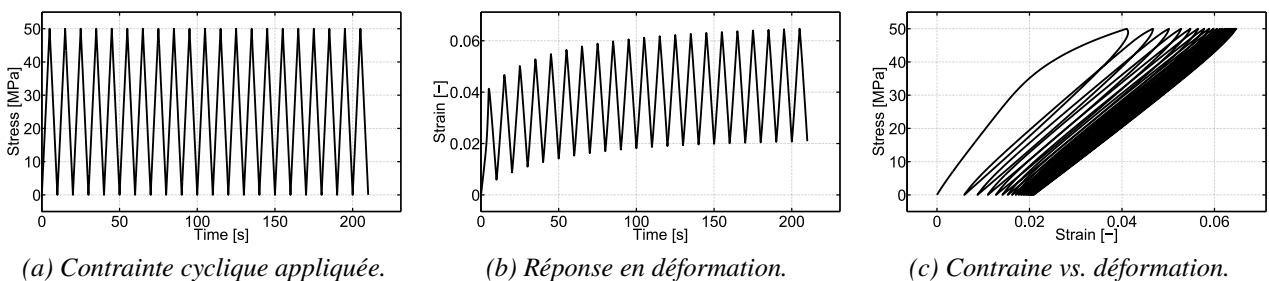


Fig. 3. Comportement de la matrice sous chargement cyclique.

## 4.2. Loi de comportement des torons

Dans les torons, de par la présence d'un renfort continu (fibres longues), le comportement longitudinal (traction 11) apparaît comme étant linéaire élastique jusqu'à ce le matériau rompe brutalement, à cause des ruptures de fibres. Cependant, le comportement transverse (traction 22 et/ou cisaillement plan 12) présente une dégradation plus progressive induite par la croissance d'un réseau diffus de microfissures dans l'interfibre. Ce comportement est modélisé ici par une loi constitutive formulée sur des bases thermodynamiques, phénoménologiques et micromécaniques à travers une approche hybride. La perte de rigidité induite par la microfissuration est calculée par un schéma d'homogénéisation par champs moyens [7, 8] en introduisant une densité de microfissure  $\gamma_c$  (fraction volumique de vide) dans le volume élémentaire représentatif [9] (Fig. 4). Par ailleurs, l'endommagement dans ce type de matériaux s'accompagne systématiquement de déformations permanentes dues à au frottement des fissures, empêchant ces dernières de se refermer. Cet aspect est phénoménologiquement décrit par un tenseur de déformation dit de glissement, noté  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , qui s'ajoute à la déformation élastique.

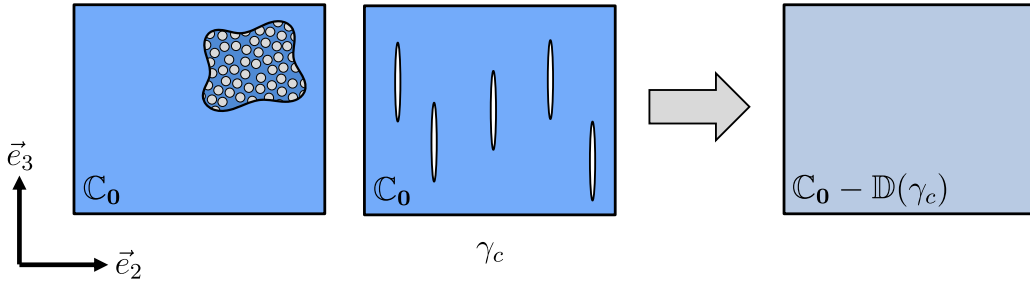


Fig. 4. Principe de modélisation pour la loi de comportement des torons.

Les lois d'état sont obtenus par dérivation thermodynamique du potentiel d'Helmholtz (Tab. 3) écrit sous la forme suivante :

$$\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma_c, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) : [\mathbb{C}_0 - \mathbb{D}(\gamma_c)] : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s). \quad (\text{Eq. 8})$$

Dans la relation ci-dessus, le tenseur des rigidités initiales  $\mathbb{C}_0$  (défini isotrope transverse) est progressivement dégradée par un tenseur de perte de rigidité, noté  $\mathbb{D}(\gamma_c)$ , calculé en fonction de la densité de microfissure. Le tenseur  $\mathbb{D}(\gamma_c)$  est exprimé à partir du schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka [8] dans lequel les microfissures sont idéalisées par des inclusions ellipsoïdales quasi-plates de vide (avec une raideur nulle), cela donne :

$$\mathbb{D}(\gamma_c) = \gamma_c \mathbb{C}_0 : \mathbb{T}_c : \mathbb{A}_0(\gamma_c) \quad \text{avec} \quad \mathbb{T}_c = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_0(\gamma_c) = (\mathbb{I} + \gamma_c(\mathbb{T}_c - \mathbb{I}))^{-1}, \quad (\text{Eq. 9})$$

où  $\mathbb{T}_c$  est le tenseur d'interaction de l'inclusion de vide, lui-même défini par le tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}_E$  [7], qu'il convient de calculer en fonction des dimensions de l'ellipsoïde et de la raideur du milieu de référence  $\mathbb{C}_0$  [10, 11].  $\mathbb{A}_0(\gamma_c)$  désigne le tenseur de localisation des déformations qui permet de définir les champs locaux (contraintes et déformations) du milieu non fissuré :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma_c, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \mathbb{A}_0(\gamma_c) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma_c, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}_0(\gamma_c) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s). \quad (\text{Eq. 10})$$

L'évolution de l'endommagement est piloté par un critère de type Hill [12], écrit dans l'espace des contraintes locales (Eq. 10). Ce critère est exprimé de manière à être uniquement sensible à un état de contrainte impliquant la composante de traction transverse  $\sigma_{022}$  et celle de cisaillement plan  $\sigma_{012}$ , cela donne :

$$H_c(\boldsymbol{\sigma}_0) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbb{H} : \boldsymbol{\sigma}_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{022}}{R_{22}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{012}}{R_{12}}\right)^2}, \quad (\text{Eq. 11})$$



où  $R_{22}$  et  $R_{12}$  représentent les seuils d'endommagement dans la direction 22 et 12, respectivement. La loi d'évolution est formulé de sorte à ce que l'endommagement s'initie lorsque  $H_c$  dépasse la valeur de 1. Passé ce stade, l'évolution de  $\gamma_c$  est donnée par une fonction de Weibull, notée  $g$ , qui dépend de la valeur maximale de  $H_c$  atteinte dans toute l'histoire du chargement :

$$\gamma_c = g(\sup(H_c)) = \gamma_c^\infty \left[ 1 - \exp \left( - \left[ \frac{\langle \sup(H_c) - 1 \rangle_+}{S} \right]^\beta \right) \right]. \quad (\text{Eq. 12})$$

$S$  et  $\beta$  sont les paramètres de la loi de Weibull et  $\gamma_c^\infty$  représente le niveau de saturation. L'évolution de la déformation de glissement,  $\varepsilon_s$ , est directement connectée à celle de  $\gamma_c$  (Tab. 3). Cette évolution est décrite par normalité d'une fonction indicatrice convexe dans l'espace des variables associés, introduisant ainsi un multiplicateur  $\lambda$  (Tab. 3). Cette fonction est donnée par :

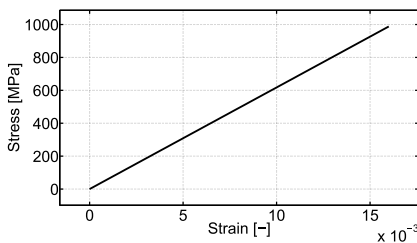
$$F(\boldsymbol{\sigma}, Y_c) = H_s(\boldsymbol{\sigma}) + Y_c \quad \text{avec} \quad H_s(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{F} : \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{(a_{22}\sigma_{22})^2 + (a_{12}\sigma_{12})^2}, \quad (\text{Eq. 13})$$

où  $a_{22}$  et  $a_{12}$  sont des paramètres matériaux.

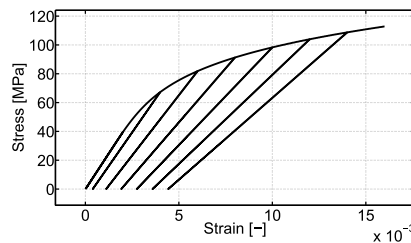
Variable d'état observable	Variable associé (loi d'état)	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = [\mathbb{C}_0 - \mathbb{D}(\gamma_c)] : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s)$	
Variables d'état internes	Variables associés (lois d'état)	Lois d'évolution
$\gamma_c$	$-Y_c = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_c}$	$\dot{\gamma}_c = \frac{\partial F}{\partial Y_c} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}, \quad \gamma_c = g(\sup(H_c))$
$\boldsymbol{\varepsilon}_s$	$-\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{\mathbb{F} : \boldsymbol{\sigma}}{H_s(\boldsymbol{\sigma})} \dot{\gamma}_c$

Tab. 3. Torons : Lois d'état et d'évolution.

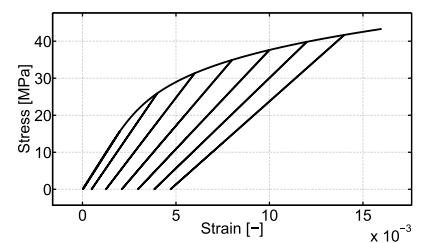
Ce type de modélisation permet de capturer la perte de raideur anisotrope induite par la présence de microfissures. Dans la direction des fibres, le comportement reste linéaire élastique (Fig. 5a), alors que dans la direction transverse, le développement de la microfissuration engendre une perte de rigidité accompagnée de déformations permanentes (Fig. 5b et 5c).



(a) Comportement en traction longitudinal :  $\sigma_{11}$  vs.  $\varepsilon_{11}$ .



(b) Comportement en traction transverse :  $\sigma_{22}$  vs.  $\varepsilon_{22}$ .



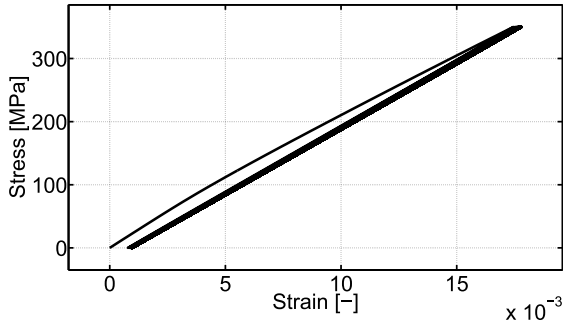
(c) Comportement en cisaillement plan :  $\sigma_{12}$  vs.  $2\varepsilon_{12}$ .

Fig. 5. Comportement anisotrope endommageable des torons.

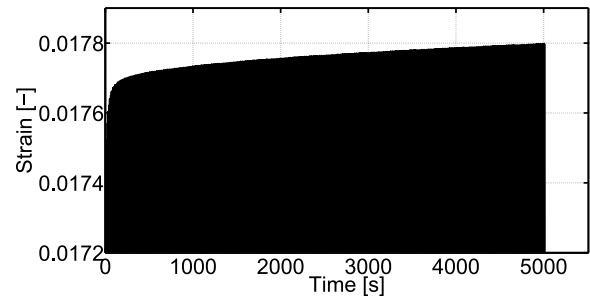
En outre, il est important de préciser que la loi de comportement des torons, telle qu'elle est formulée ici, ne présente aucune dépendance au temps, contrairement à la matrice (Sec. 4.1).

## 5. Résultats

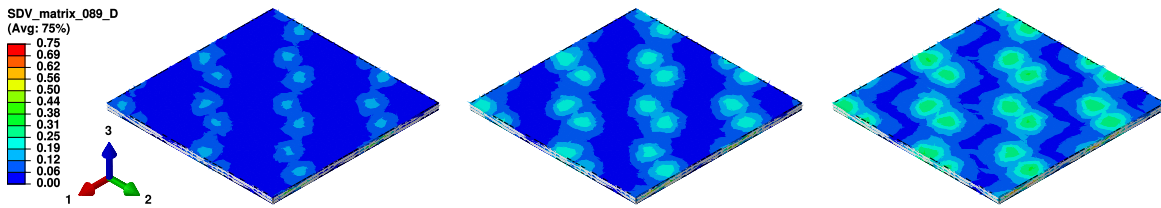
Dans cette section, les capacités du modèle, à capturer à l'échelle macroscopique, les effets temporels induits par la matrice (Sec. 4.1), couplées aux mécanismes d'endommagement intra-torons (Sec. 4.2), sont illustrées à travers deux simulations où le composite est soumis à des chargements cycliques dans la direction du renfort (Fig. 6) et en cisaillement plan (Fig. 7). Macroscopiquement, le composite accumule, d'un cycle à l'autre, de la déformation (Fig. 6a, 6b, 7a et 7b). Cette accumulation progresse rapidement lors des premiers cycles avant d'atteindre un régime plus lent à partir d'un certain moment. Dans le cas du cisaillement plan (Sec. 4.2), une troisième phase, annonciateur de la rupture du composite, est même atteinte où la déformation progresse à nouveau rapidement et de façon significative (Fig. 7a et 7b). Ces effets sont la cause directe des propriétés rhéologiques et



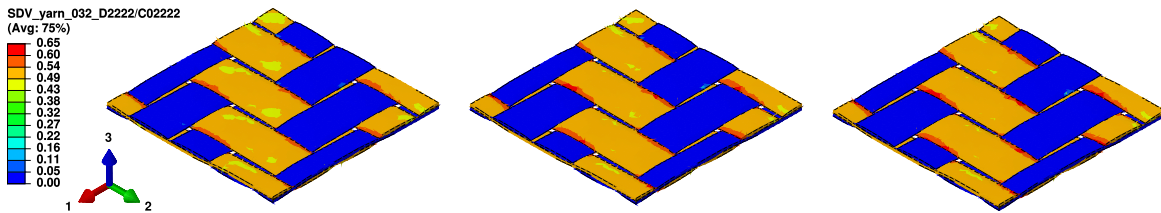
(a) Comportement macroscopique :  $\bar{\sigma}_{11}$  vs.  $\bar{\epsilon}_{11}$ .



(b) Réponse macroscopique : déformation  $\bar{\epsilon}_{11}$  en fonction du temps, zoom sur les hauts de cycles.



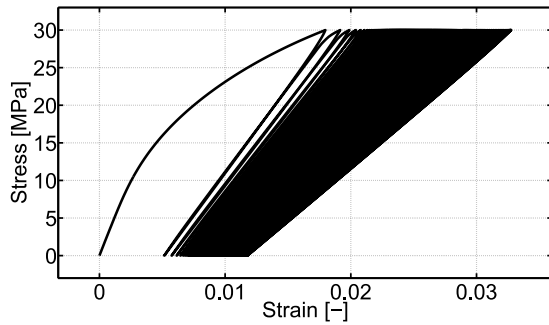
(c) Endommagement local dans la matrice ( $D$ ) à la fin des cycles 0 (à gauche), 100 (au centre) et 500 (à droite), respectivement à  $t = 10$  s, 1010 s et 5010 s.



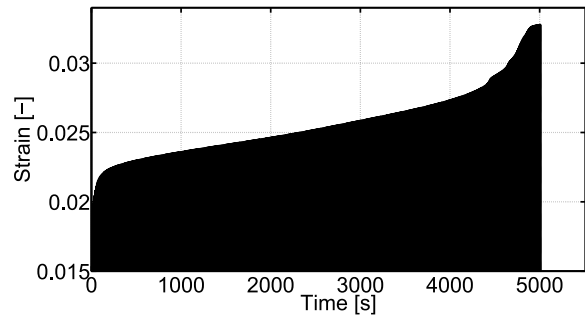
(d) Endommagement local dans les torons ( $D_{2222}/C_{02222}$ ) à la fin des cycles 0 (à gauche), 100 (au centre) et 500 (à droite), respectivement à  $t = 10$  s, 1010 s et 5010 s.

Fig. 6. Simulation d'une traction uniaxiale cyclique contrôlée en contrainte  $\bar{\sigma}_{11}$  (501 cycles). Un cycle se compose d'une montée en charge jusqu'à  $\bar{\sigma}_{11} = 350$  MPa en 5 s suivit d'une décharge à contrainte nulle en 5 s, soit 10 s par cycle.

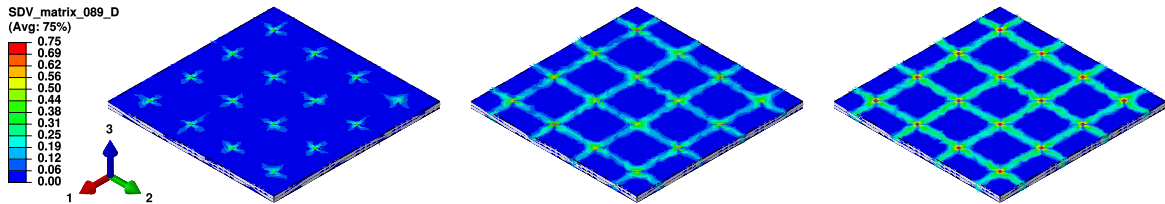
endommageables de la matrice (Sec. 4.1) qui se répercutent à l'échelle macroscopique. Cependant, il est à noter une évolution de l'endommagement dans les torons (Fig. 6d et 7d), et ce, malgré que la loi de comportement de ces derniers ne présente aucune dépendance au temps (Sec. 4.2). Ainsi l'évolution de l'endommagement intra-torons est ici uniquement provoqué par interaction microstructurale avec la matrice. Microscopiquement, la troisième phase atteinte lors du cisaillement plan (Sec. 4.2) est due à une importante localisation de l'endommagement au niveau des zones d'intersection entre torons transversaux (Fig. 7c et 7d). Dans un dernier exemple (Fig. 8), le composite est soumis à un chargement



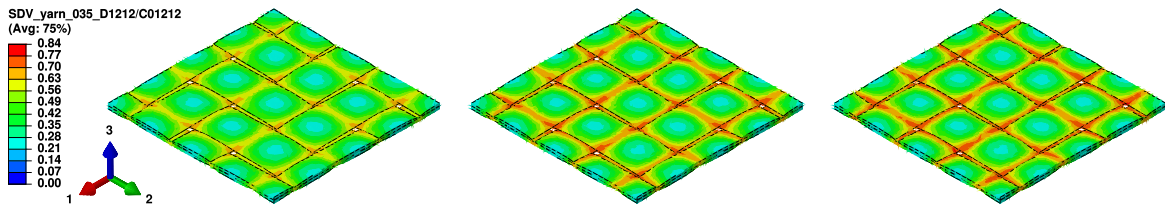
(a) Comportement macroscopique :  $\bar{\sigma}_{12}$  vs.  $2\bar{\varepsilon}_{12}$ .



(b) Réponse macroscopique : déformation  $2\bar{\varepsilon}_{12}$  en fonction du temps, zoom sur les hauts de cycles.



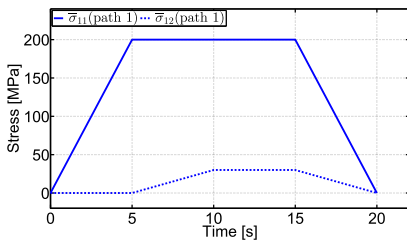
(c) Endommagement local dans la matrice ( $D$ ) à la fin des cycles 0 (à gauche), 100 (au centre) et 300 (à droite), respectivement à  $t = 10$  s, 1010 s et 3010 s.



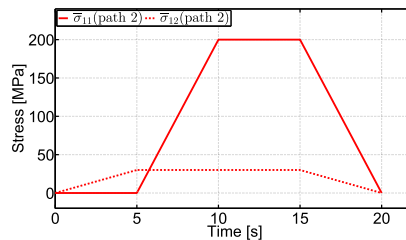
(d) Endommagement local dans les torons ( $D_{1212}/C_{01212}$ ) à la fin des cycles 0 (à gauche), 100 (au centre) et 300 (à droite), respectivement à  $t = 10$  s, 1010 s et 3010 s.

Fig. 7. Simulation d'un cisaillement cyclique contrôlée en contrainte  $\bar{\sigma}_{12}$  (501 cycles). Un cycle se compose d'une montée en charge jusqu'à  $\bar{\sigma}_{12} = 30$  MPa en 5 s suivit d'une décharge à contrainte nulle en 5 s, soit 10 s par cycle.

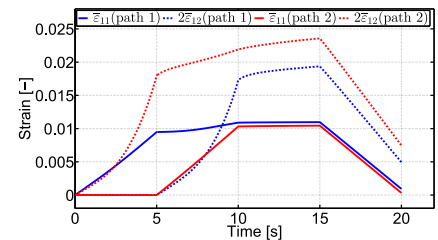
multiaxial en traction  $\bar{\sigma}_{11}$  et en cisaillement plan  $\bar{\sigma}_{12}$ . Des amplitudes de contraintes identiques sont appliquées sur le composite mais selon deux chronologies différentes (Fig. 8a et 8b). Ces simulations mettent en évidence l'influence du trajet de chargement qu'apporte une description microstructurale du comportement du composite (Fig. 8c).



(a) Contraintes macroscopiques appliquées :  $\bar{\sigma}_{11}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$  en fonction du temps pour le chemin 1.



(b) Contraintes macroscopiques appliquées :  $\bar{\sigma}_{11}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$  en fonction du temps pour le chemin 2.



(c) Réponse macroscopique : déformations  $\bar{\varepsilon}_{11}$  et  $2\bar{\varepsilon}_{12}$  en fonction du temps pour les chemins 1 et 2.

Fig. 8. Exemples de chargements multiaxiaux non proportionnels, application sur le composite tissé de deux états de contrainte ayant les mêmes amplitudes mais suivant des chronologies différentes.

## 6. Conclusions et perspectives

Dans ce travail, un cadre général de modélisation multi-échelle basée sur le principe de l'homogénéisation périodique a été introduit et appliqué au cas des composites tissés à matrice thermoplastiques sous chargements cycliques et non proportionnels. L'approche présentée s'avère capable de simuler le comportement macroscopique d'un milieu périodique en prenant en compte les comportements locaux des constituants ainsi que les interactions liées aux effets de microstructure. Concernant les perspectives de travail, un des enjeux majeurs lié à une telle modélisation est de pouvoir directement connecter la cellule unitaire à un macro-modèle éléments finis à l'aide un processus d'analyses éléments finis au carré [13] dans lequel le problème macroscopique est résolu de façon incrémentale en faisant appel au problème microscopique à chaque pas de temps. En outre, le fait que les lois de comportement locales soient rigoureusement écrites dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles permet d'étendre l'approche proposée aux analyses thermomécaniques fortement couplées [14]. Ce qui permettrait de prendre en compte le phénomène d'auto-échauffement par exemple. Enfin, une méthode d'intégration temporelle réduite telle que la "méthode des sauts de cycles" [15] ou encore "l'homogénéisation temporelle" [16] peuvent également être envisagées, afin d'effectuer des analyses multi-échelles en fatigue à grands nombres de cycles, tout en gardant des temps de calcul acceptables.

### Remerciements

Ce travail fait partie du projet COPERSIM piloté par L'IRT Jules Verne. Les auteurs souhaitent associer les partenaires académiques et industriels de ce projet; respectivement Arts et Métiers ParisTech, Solvay, Plastic Omnium, PSA et Renault.

### Références

- [1] J.-C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet « Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach », *Computer methods in applied mechanics and engineering* Vol. 172, pp. 109–143, 1999.
- [2] S. Li, A. Wongsto « Unit cells for micromechanical analyses of particle-reinforced composites », *Mechanics of Materials* Vol. 36, pp. 543–572, 2004.
- [3] G. Chatzigeorgiou, Y. Chemisky, F. Meraghni « Computational micro to macro transitions for shape memory alloy composites using periodic homogenization », *Smart Materials and Structures* Vol. 24, 2015.
- [4] M. Sherburn « Geometric and mechanical modelling of textiles », Ph.D. thesis, University of Nottingham, 2007.
- [5] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [6] A. Krairi, I. Doghri « A thermodynamically-based constitutive model, for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity viscoplasticity and ductile damage », *International Journal of Plasticity* Vol. 60, pp. 163–181, 2014.
- [7] J.-D. Eshelby « The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems », *Proceedings of the Royal Society of London* Vol. A n° 241, pp. 376–396, 1957.
- [8] T. Mori, K. Tanaka « Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions », *Acta Metallurgica* Vol. 21, pp. 571–574, 1973.
- [9] F. Meraghni, M.-L. Benzeggagh « Micromechanical modelling of matrix degradation in randomly oriented discontinuous-fibre composites », *Composites science and technology* Vol. 55, pp. 171–186, 1995.
- [10] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff publishers, 2 edn., 1987.
- [11] A.-C. Gavazzi, D.-C. Lagoudas « On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites », *computational Mechanics* Vol. 7, pp. 13–19, 1990.
- [12] R. Hill « A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals », *Proceedings of the Royal Society of London* Vol. 193, pp. 281–297, 1948.
- [13] F. Feyel « Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures », *Computational Materials Science* Vol. 16, pp. 344–354, 1999.
- [14] G. Chatzigeorgiou, N. Charalambakis, Y. Chemisky, F. Meraghni « Periodic homogenization for fully coupled thermomechanical modeling of dissipative generalized standard materials », *International Journal of Plasticity* Vol. 81, pp. 18–39, 2016.
- [15] D. Cojocar, A. Karlsson « A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures », *International Journal of Fatigue* Vol. 28, pp. 1677–1689, 2006.
- [16] S. Haouala, I. Doghri « Modeling and algorithms for two-scale time homogenization of viscoelastic-viscoplastic solids under large numbers of cycles », *International Journal of Plasticity* Vol. 70, pp. 98–125, 2015.