



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/8254>

To cite this version :

Damien ANDRE, Jean-Luc CHARLES, Jérôme NEAUPORT, Ivan IORDANOFF - Modèle par éléments discrets pour l'étude du comportement dynamique d'un matériau élastique. - In: Colloque National en Calcul des Structures (10; 2011; Var), France, 2011-05-09 - Colloque National en calcul des Structures (10; 2011; Var) - 2011

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



Modèle par éléments discrets pour l'étude du comportement dynamique d'un matériau élastique.

Méthodologie de quantification des paramètres microscopiques.

D. André¹, I. Iordanoff², J. L. Charles³, J. Néauport⁴

¹ I2M-DuMAS, UMR 5295 CNRS, Arts et Métiers ParisTech, Talence, France, damien.andre@lamef.bordeaux.ensam.fr

² I2M-DuMAS, UMR 5295 CNRS, Arts et Métiers ParisTech, Talence, France, iordanoff@lamef.bordeaux.ensam.fr

³ I2M-DuMAS, UMR 5295 CNRS, Arts et Métiers ParisTech, Talence, France, jlc@lamef.bordeaux.ensam.fr

⁴ CEA, CESTA, F-33114, Le Barp, France, JEROME.NEAUPOINT@projet-lmj.org

Résumé — Le comportement mécanique des matériaux est généralement simulé par des approches issues de la mécanique des milieux continus. Cependant, lorsqu'il s'agit de simuler des phénomènes de multifissurations voir de multifracturations, les modèles de la mécanique discrète s'avèrent mieux adaptés, car ils prennent en compte naturellement les discontinuités générées par les interfaces. La difficulté est alors de s'assurer qu'une approche par éléments discrets (DEM) permet bien de retrouver le comportement mécanique au sens de la mécanique des milieux continus. Cet article propose une méthodologie permettant, à partir des données connues du matériau à simuler (module de Young, coefficient de Poisson, célérité de propagation des ondes), de quantifier les paramètres « microscopiques » du modèle DEM.

Mots clés — DEM, élément discret, modèle continu, modèle discret, calibration

Le modèle élément discret permet de décrire assez naturellement un milieu granulaire. C'est ainsi qu'il fut pour la première fois employé en 1979 [1]. Plus récemment, des auteurs ont mis à profit cette méthode pour l'étude de l'endommagement de solides hétérogènes comme les bétons [2], les roches [3], ou de matériaux homogènes comme les céramiques [4].

Dans le cadre de la thèse « modélisation par éléments discrets des phases d'ébauchage et de doucissage de la silice », le milieu (le verre de silice) est supposé homogène. Le phénomène étudié est la fissuration intervenant au cours de l'opération de surfacage par sollicitations cycliques des particules abrasives sur le matériau abrasé [5]. Ces fissurations sont nécessaires à l'opération de surfacage puisqu'elles permettent l'enlèvement de matière. Toutefois, certaines d'entre elles subsistent et se révèlent néfastes quant à l'utilisation ultérieure du composant optique [6].

L'approche par éléments discrets permet, naturellement, de représenter les discontinuités au sein du matériau. Par contre, les lois de comportement de la mécanique des milieux continus ne pouvant être directement appliquées, la modélisation des propriétés élastiques et dynamiques est plus problématique. En fait, le comportement d'un domaine discret à l'échelle de la structure est le résultat d'une multitude d'interactions élémentaires à l'échelle microscopique. Ainsi, les comportements macroscopiques ne sont que difficilement prédictibles. En ce sens, il peuvent être qualifiés de propriétés émergentes [7, préface].

Il est donc nécessaire de calibrer les propriétés microscopiques de façon à obtenir les propriétés désirées à l'échelle macroscopique. Dans le cas de domaines discrets ordonnés, une approche analytique permet de résoudre ce problème [8]. Mais cette approche ne peut être appliquée dans le cas de domaines désordonnés. Il est alors nécessaire de recourir à des essais de calibration [9, §3.1].

Cet article s'intéresse à la simulation de matériaux élastiques homogènes et isotropes. Le matériau de référence est le verre de silice en relation avec la problématique ci-dessus. Le modèle DEM retenu est de type dynamique explicite basé sur une représentation sphérique (3D) des éléments discrets. Les éléments discrets interagissent mécaniquement entre eux par l'intermédiaire de liaisons cohésives de type poutre. Le modèle retenu est proche de celui utilisé dans [10].

Dans un premier temps le modèle de liaison cohésive poutre sera introduit. La deuxième partie sera dédiée à la validation du domaine initial. La troisième et quatrième partie sera consacrée à la description de méthodologies de calibration des propriétés microscopiques. Ces méthodes seront finalement mises en oeuvre puis validées au cours d'une cinquième partie.

1 Modèle de liaison cohésive poutre

La figure 1a illustre la liaison cohésive de type poutre au sein d'un domaine discret. La forme choisie est de type cylindrique. Elle permet de décrire sa géométrie avec seulement deux paramètres : longueur L_μ et rayon r_μ ¹. Deux paramètres mécaniques sont également associés : module de Young E_μ et coefficient de Poisson ν_μ .

La figure 1b illustre une liaison cohésive poutre dans un état déformé. Les extrémités de la poutre sont "encastrées" au centre des éléments discrets O_1 et O_2 . La poutre est considérée comme relaxée lorsque l'axe (O_1, \vec{X}_1) appartenant à l'élément discret 1 et l'axe (O_2, \vec{X}_2) appartenant à l'élément discret 2 sont directement opposés. Le repère de la poutre est alors défini par $F(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Cette description permet de définir les rotations des sections droites aux extrémités $\vec{\theta}_1$ et $\vec{\theta}_2$ ainsi que l'allongement ΔL . Les déflexions (ou fêches) en O_1 et O_2 sont nulles. D'après les lois de la résistance des matériaux appliquées aux poutres d'Euler-Bernoulli, il est possible d'écrire :

$$\vec{F}_{B/DE1} = +E_\mu S_\mu \frac{\Delta L_\mu}{l_\mu} \vec{X} - \frac{6E_\mu I_\mu}{l_\mu^2} \left((\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Y} + (\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Z} \right) \quad (1)$$

$$\vec{F}_{B/DE2} = -E_\mu S_\mu \frac{\Delta L_\mu}{l_\mu} \vec{X} + \frac{6E_\mu I_\mu}{l_\mu^2} \left((\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Y} - (\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Z} \right) \quad (2)$$

$$\vec{T}_{B/DE1} = +\frac{G_\mu I_{O_\mu}}{l_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x}) \vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{l_\mu} \left((\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Y} - (\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Z} \right) \quad (3)$$

$$\vec{T}_{B/DE2} = -\frac{G_\mu I_{O_\mu}}{l_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x}) \vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{l_\mu} \left((2\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Y} - (2\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Z} \right) \quad (4)$$

Avec :

- $\vec{F}_{B/DE1}$ est la force de réaction de la poutre sur l'élément discret 1.
- $\vec{F}_{B/DE2}$ est la force de réaction de la poutre sur l'élément discret 2.
- $\vec{T}_{B/DE1}$ est le moment de réaction de la poutre sur l'élément discret 1.
- $\vec{T}_{B/DE2}$ est le moment de réaction de la poutre sur l'élément discret 2.
- L_μ est la longueur initiale de la poutre.
- ΔL_μ est l'allongement de la poutre.
- $\vec{\theta}_1(\theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z})$ est la rotation de la section droite au point O_1 .
- $\vec{\theta}_2(\theta_{2x}, \theta_{2y}, \theta_{2z})$ est la rotation de la section droite au point O_2 .
- S_μ est la section de la poutre.
- I_{O_μ} est le moment quadratique polaire de la section de la poutre.
- I_μ est le moment quadratique de la section de la poutre selon \vec{Y} et \vec{Z} .
- E_μ est le module de Young de la poutre.
- G_μ est le module de cisaillement de la poutre.

Les forces et moments de réaction sont exprimés dans le repère local de la poutre $F(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Les poutres ne possèdent pas de paramètre de masses. Les propriétés massiques sont reportées sur les éléments discrets.

2 Validation du domaine compact initial

Le domaine initial doit être en accord avec les propriétés structurales du matériau à simuler. Dans le cas de la silice, homogène et isotrope. La disposition géométrique du domaine initial impacte le comportement mécanique du matériau simulé.

Des configurations géométriques ordonnées favorisent l'apparition de comportements mécaniques anisotropes et sont donc à proscrire [11, 10]. De plus, dans le cas de simulation DEM à base d'éléments sphériques, il existe des zones vides entre particules. Pour réduire ces zones de vides indésirables, une

1. Pour distinguer les paramètres micros des paramètres macros les paramètres micros sont annotés de l'index ' μ ' et les paramètres macros de l'index ' M '.

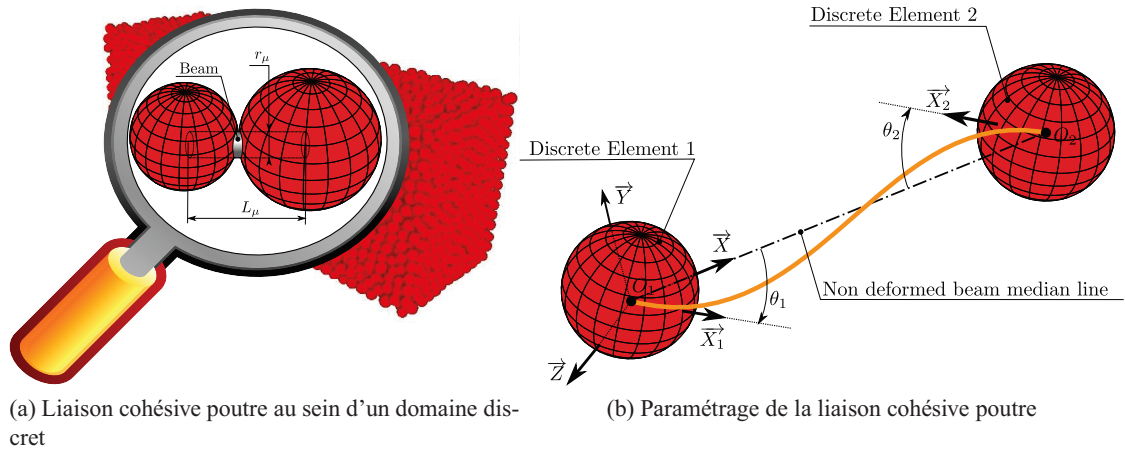


FIGURE 1 – Illustration de la liaison cohésive poutre

phase de compaction du domaine initial est nécessaire. Différents algorithmes de compaction existent : des méthodes "dynamiques" [12, 13] ou des méthodes géométriques [14].

L'introduction d'un aléa au niveau des rayons des éléments discrets favorise l'apparition de domaines désordonnés. Pour des dispersions faibles, le domaine généré par compaction est de type "Random Close Packing" (RCP) [15]. Pour s'assurer de la conformité du domaine généré, le nombre de coordination² doit être proche de 6 [16] et la fraction volumique³ proche de 0,636 [17].

Un autre paramètre géométrique du domaine impacte fortement le comportement mécanique : l'anisotropie géométrique. Cambou dans [18, Introduction, §3.6] définit ce paramètre comme étant la répartition des directions des contacts dans l'espace. Si cette répartition est parfaitement homogène, le domaine est considéré comme géométriquement isotrope. Dans le cadre de simulations de matériaux mécaniquement isotropes, cette anisotropie géométrique doit être minimale. Afin de caractériser ce paramètre, une méthode de mesure originale et intuitive a été développée.

Un solide platonique (géode) comportant 320 facettes de morphologie similaire permet de discrétiser l'espace 3D en "angle solide discret". Le volume reliant le centre de la géode à une facette correspond à un angle solide. Si la direction d'un contact est comprise dans l'angle solide alors celui-ci est ajouté au groupe correspondant. Ce procédé permet de regrouper les contacts suivant leurs directions privilégiées. Le poids de chaque groupe correspond au nombre de contacts dont la direction est comprise dans l'angle solide de ce groupe. L'anisotropie est alors définie par l'écart type du poids de ces groupes.

La figure 2 représente l'évolution de l'écart type en fonction de la dispersion (uniforme) appliquée au rayon des éléments discrets sur des domaines comportant un grand nombre de particules (environ 50 000). L'évolution montre une convergence ainsi qu'une valeur minimale de l'anisotropie géométrique pour une dispersion radiale de 15 %. Ces résultats sont en accord avec ceux observés par Luding [19, chapter 5]. Pour le reste de l'étude la valeur de 25 % de dispersion radiale sera appliquée.

Une autre interrogation porte sur le nombre minimum d'éléments discrets permettant d'assurer des propriétés géométriques stables. Les figures 3a, 3b et 3c montrent l'évolution de la fraction volumique, du nombre de coordination et de l'anisotropie en fonction du nombre d'éléments discrets pour un volume englobant constant de 1 m^3 . Ces courbes montrent une convergence des résultats pour un nombre d'environ 10 000 éléments. Il est possible alors de définir un critère 1D égal à $10000^{1/3}$ soit environ 21,5.

3 Calibration des paramètres élastiques

Les liaisons cohésives poutres sont introduites après la phase de compaction du domaine : à chaque contact est associé une liaison cohésive. Dans la suite de l'étude, les contacts ne sont plus pris en compte. Seules les réactions des liaisons cohésives poutres sont calculées.

2. Nombre moyen de contacts par élément discret.

3. Rapport entre volumes effectifs occupés par les éléments discrets sur le volume englobant.

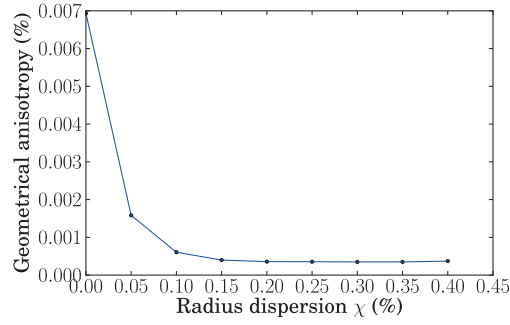


FIGURE 2 – Évolution de l'anisotropie géométrique en fonction de la dispersion appliquée au rayon des éléments discrets

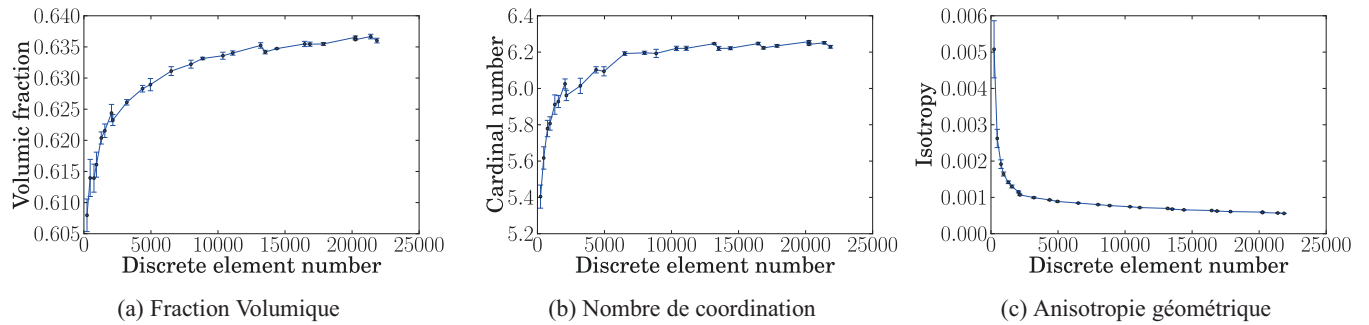


FIGURE 3 – Évolution des paramètres géométriques en fonction du nombre d'éléments discrets

Afin de "mesurer" numériquement le module de Young (E_M) et le coefficient de Poisson (ν_M) macroscopique, un échantillon numérique de forme cylindrique (voir figure 4) est soumis à un essai de traction quasi statique. Connaissant la géométrie du domaine discret ainsi que le chargement appliqué, les valeurs des propriétés macroscopiques peuvent être déduites grâce aux lois de la résistance des matériaux.

Une première étude porte sur l'influence du coefficient de Poisson microscopique sur les paramètres macroscopiques. Il apparaît que pour une variation du coefficient de Poisson microscopique (ν_μ) entre 0 et 0,5 le module de Young macroscopique varie de 0,4% et le coefficient de Poisson macroscopique de 1,2%. L'influence de ce paramètre est donc très faible. De façon arbitraire il sera fixé à $\nu_\mu = 0,3$ pour le reste de l'étude.

Une seconde étude porte sur l'influence du rayon r_μ^4 et du module de Young E_μ des liaisons cohésives poutres. Les figures 5 et 6 montrent l'évolution des paramètres macroscopiques en fonction des ces

4. Pour s'affranchir des effets d'échelles, l'étude porte en fait sur le rayon adimensionné \tilde{r}_μ défini par le rapport entre le rayon microscopique des liaisons cohésives poutres sur le rayon moyen des éléments discrets

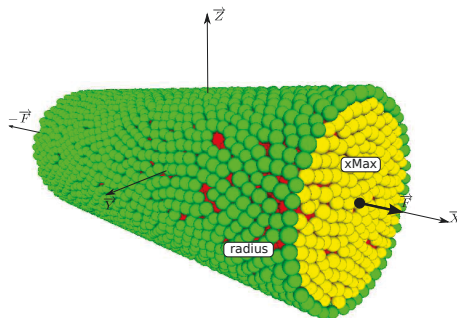


FIGURE 4 – Échantillon numérique

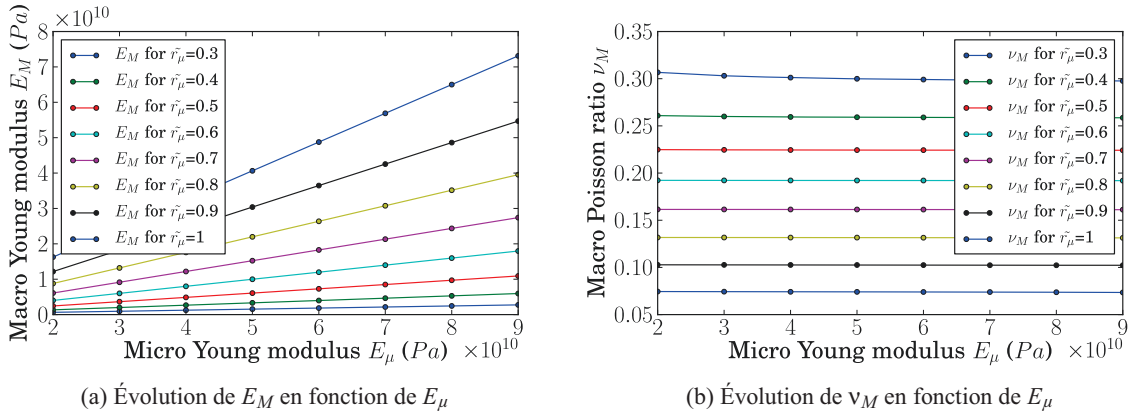


FIGURE 5 – Influence du module de Young microscopique E_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et ν_M

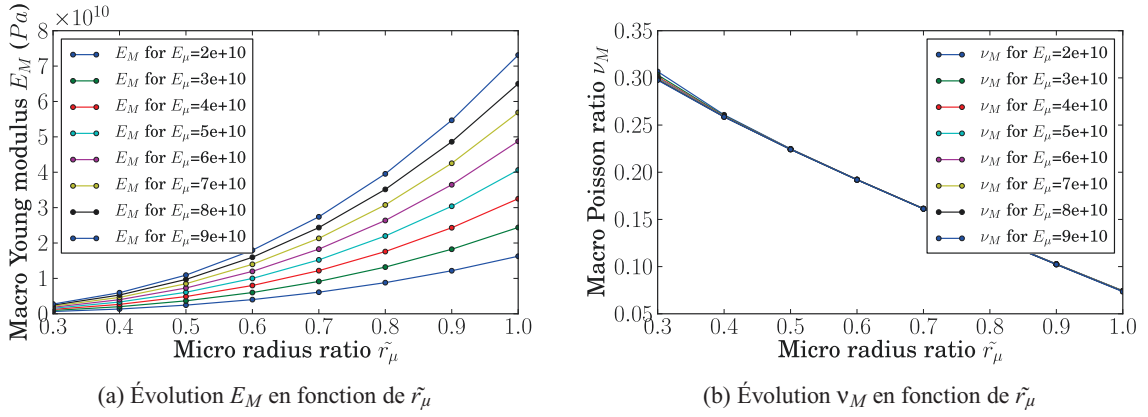


FIGURE 6 – Influence du rayon adimensionné microscopique \tilde{r}_μ sur les paramètres macroscopiques E_M et ν_M

paramètres microscopiques. Une particularité intéressante est l'indépendance du coefficient de Poisson macroscopique ν_M par rapport au module de Young microscopique E_μ (cf figure 5b). Il est donc possible de calibrer E_μ sans affecter le coefficient de Poisson macroscopique ν_M . La méthode de calibration se décline alors en 3 étapes :

1. Calibration du coefficient de Poisson macroscopique ν_M avec le rayon adimensionné microscopique \tilde{r}_μ . Dans le cas de la silice $\tilde{r}_\mu^{silica} \approx 0.672$ correspond à $\nu_M^{silica} \approx 0.17$ (cf figure 7a).
2. Mise en oeuvre d'essais de traction avec la valeur \tilde{r}_μ précédemment choisie pour obtenir l'évolution de E_M en fonction de E_μ
3. Calibration du module de Young macroscopique E_M avec le module de Young microscopique E_μ . Dans le cas de la silice $E_\mu^{silica} \approx 266.5 \text{ GPa}$ correspond à $E_M^{silica} \approx 72.5 \text{ GPa}$ (cf figure 7b).

4 Calibration des paramètres massiques

La section précédente introduit une méthode de calibration des paramètres élastiques adaptée aux liaisons cohésives poutres. Il est alors possible de retrouver à l'échelle macroscopique une valeur du module de Young et du coefficient de Poisson désirée. Bien que nécessaire, cela n'est pas suffisant. Afin de simuler des phénomènes dynamiques tels que les propagations d'ondes mécaniques ou des phénomènes de multifissurations, il est nécessaire de calibrer également les propriétés massiques du matériau discret.

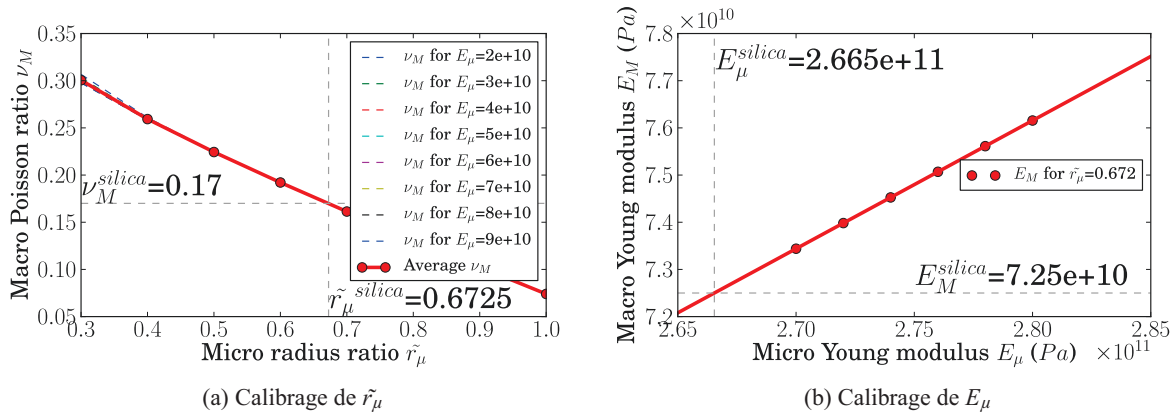


FIGURE 7 – Calibrage élastique du matériau silice

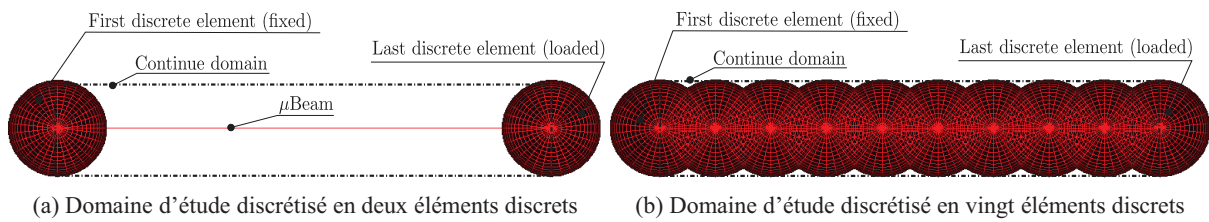


FIGURE 8 – Illustration des domaines d'étude de convergence dynamique

La méthode retenue est très simple : il s'agit de compenser les vides générés par la méthode de compaction en assurant une égalité de masse entre domaine discret et domaine continu. Pour ce faire, la masse volumique des éléments discrets est ajustée en conséquence. Pour étudier cette approche, une série de tests de convergence ont été menés.

Un domaine discret composé de particules alignées est chargé dynamiquement en traction, flexion puis torsion. L'élément discret de gauche est fixe. Le chargement est appliqué à l'élément discret de droite (voir figure 8). L'étude de convergence porte sur le nombre d'éléments discrets mis en jeu (de 2 à 20). Les résultats numériques (périodes d'oscillation) sont comparés aux solutions analytiques issues de la vibration des milieux continus dans le cas de poutres d'Euler-Bernouilli [20, §4.1, §4.2, §4.3].

Les résultats obtenus montrent une convergence dans le cas de la traction (voir figure 9a) et de la flexion (voir figure 9b). Le cas de la torsion est plus problématique (voir figure 9c, courbe *Numerical (mass)*). En effet, l'égalité de masse n'assure pas l'égalité des inerties. Pour vérifier cette hypothèse, une deuxième étude de convergence a été menée en prenant l'inertie axiale d'un cylindre au lieu de celle d'une sphère (voir figure 9c, courbe *Numerical (inertia)*). Dans ce cas les résultats convergent vers la solution théorique. Mais ces deux critères sont inconciliables. Toutefois l'égalité de masse permet une solution approchée à 10 % près. De plus, dans une simulation DEM massive (faisant intervenir un nombre important d'éléments discrets) la contribution de l'énergie locale de torsion est négligeable. En conclusion, l'erreur de 10% n'est pas pénalisante pour des simulations DEM massives.

5 Validation

Cette section propose de valider les méthodes de calibration. Le matériau de référence est le verre de silice dont les propriétés sont : un module de Young de $72,5 \text{ Gpa}$, un coefficient de Poisson de $0,17$ et une masse volumique de 2201 kg/m^3 . Le matériau discret est calibré de façon à obtenir ces propriétés macroscopiques suivant les méthodologies présentées aux sections 3 et 4

Pour valider les caractéristiques élastiques, l'échantillon numérique (voir figure 4) est soumis à des tests de traction, flexion et torsion quasi statiques. Les critères de validation retenus sont les déplacements

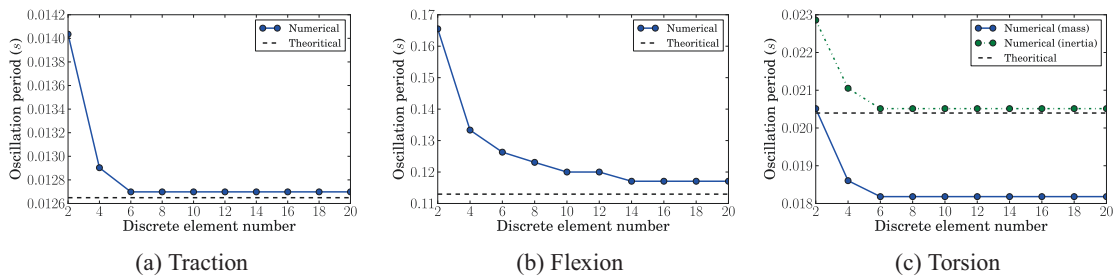


FIGURE 9 – Période d’oscillation sous sollicitation dynamique

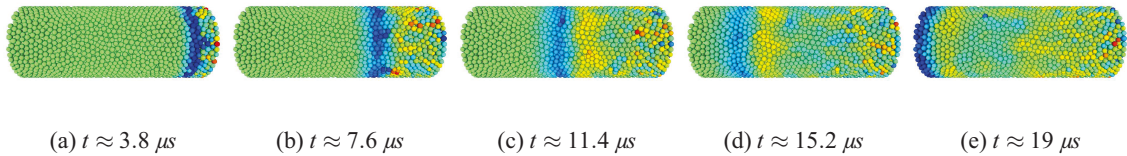


FIGURE 10 – Illustration du déplacement du front d’onde mécanique

et rotations de l’extrémité libre. Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus en les comparant aux solutions théoriques.

	Traction	Flexion	Torsion
Critères	Déplacement longitudinal	Déplacement transverse	Rotation
Différence	1.20 %	4.16 %	6.13 %

Pour valider le comportement dynamique, le même échantillon numérique est soumis à des tests de traction, flexion, torsion dynamiques. Les critères de validation retenus sont les périodes d’oscillation en déplacement et rotation de l’extrémité libre. Un test de choc a également été mené afin de "mesurer" la vitesse de propagation de l’onde mécanique au sein du milieu discret (cf figures 10). Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus en les comparant aux solutions théoriques.

	Traction	Flexion	Torsion	Choc
Critères	Fréquence des oscillations longitudinales	Fréquence des oscillations transverses	Fréquence des oscillations de rotations	Vitesse de propagation d’onde
Différence	0.38 %	6.63 %	0.50 %	0.40 %

6 Conclusion

La section 1 présente le modèle de liaison cohésive poutre. Ce modèle permet grâce à l’introduction de rigidités de flexion au niveau microscopique d’obtenir un effet de striction au niveau macroscopique. C’est un avantage considérable de ce modèle.

La section 2 a permis de définir des critères de validation du domaine compact initial. Une méthode de mesure originale de l’anisotropie géométrique a été introduite. Puis un critère de finesse de discrétisation a été présenté afin d’assurer une stabilité des propriétés géométriques du domaine.

La section 3 introduit une méthode de calibration des paramètres élastiques microscopiques des liaisons cohésives poutres. Cette méthode, basée sur une étude paramétrique, permet de restituer à l’échelle macroscopique les valeurs souhaitées du module de Young et du coefficient de Poisson.

La section 4 décrit une méthode de calibration des paramètres massiques microscopiques. La densité des éléments discrets est calculée de façon à garantir l'égalité de masse entre domaine discret et domaine continu.

La section 5 met en application les méthodes de calibration. Le matériau numérique est soumis à une batterie de tests dont les résultats sont comparés aux modèles analytiques. Les tableaux récapitulatifs montrent des solutions numériques en accord avec les solutions théoriques.

Avec la méthodologie présentée, un modèle DEM quantitatif de matériau homogène et isotrope est obtenu. La méthode DEM est la plus souvent utilisée comme un modèle de description et de compréhension quantitative de phénomènes complexes comme le frottement, la fracturation, ou bien les chocs. Ce travail est un premier pas vers un outil numérique prédictif pour cette classe de problème dont la résolution reste encore aujourd'hui problématique.

Références

- [1] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29 :47–65, 1979.
- [2] S. Hentz, F. V. Donzé, and L. Daudeville. Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates. *Computers & Structures*, 82(29-30) :2509–2524, 2004.
- [3] A. Bobet, A. Fakhimi, S. Johnson, J. Morris, F. Tonon, and M. R. Yeung. Numerical models in discontinuous media : Review of advances for rock mechanics applications. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(11) :1547–1561, 2009.
- [4] Y. Tan, D. Yang, and Y. Sheng. Discrete element method (dem) modeling of fracture and damage in the machining process of polycrystalline sic. *Journal of the European Ceramic Society*, 29(6) :1029–1037, 2009.
- [5] Hank H. Karow. *Fabrication methods for precision optics*. Wiley-Interscience, 2004. ISBN 0-471-70379-6.
- [6] T. Suratwala, P. Davis, L. Wong, P. Miller, M. Feit, J. Menapace, R. Steele, and D. Walmer. Sub-surface mechanical damage distributions during grinding of fused silica. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 352 :5601–5617, 2006.
- [7] A. Munjiza. *The combined Finite-Discrete Element Methode*. John Wiley & Sons, 2004.
- [8] M. Ostoja-Starzewski. Lattice models in micromechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :35–60, 2002.
- [9] D.O. Potyondy and P. A. Cundall. A bonded-particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41(8) :1329–1364, 2004. Rock Mechanics Results from the Underground Research Laboratory, Canada.
- [10] H. A. Carmona, F. K. Wittel, F. Kun, and H. J. Herrmann. Fragmentation processes in impact of spheres. *Physical Review*, 77(5) :051302, 2008.
- [11] E. Schlangen and E. J. Garboczi. New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *International Journal of Engineering Science*, 34(10) :1131–1144, 1996.
- [12] Boris D. Lubachevsky and Frank H. Stillinger. Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics*, 60 :561–583, 1990.
- [13] C. L. Martin, D. Bouvard, and S. Shima. Study of particle rearrangement during powder compaction by the discrete element method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(4) :667–693, 2003.
- [14] Jean-François Jerier, Vincent Richefeu, Didier Imbault, and Frédéric-Victor Donzé. Packing spherical discrete elements for large scale simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28) :1668–1676, 2010.
- [15] Kristin Lochmann, Luc Oger, and Dietrich Stoyan. Statistical analysis of random sphere packings with variable radius distribution. *Solid State Sciences*, 8(12) :1397–1413, 2006.
- [16] Keishi Gotoh and J. L. Finney. Statistical geometrical approach to random packing density of equal spheres. *Nature*, 252 :202–205, 1974.
- [17] J. L. Finney. Random packings and the structure of simple liquids. i. the geometry of random close packing. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 319(1539) :pp. 479–493, 1970.
- [18] B. Cambou. *Behaviour of Granular Materials*. Springer, illustrated edition edition, 1998.
- [19] T. Pöschel and S. Luding. *Granular Gases*, volume Vol. 564 of *Lecture Notes in Physics*. Pöschel, Thorsten ; Luding, Stefan, 2001.
- [20] A. A. Shabana. *Vibration of discrete and continuous systems*. Mechanical engineering series. Springer, second edition, 1997.