



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/8299>

#### **To cite this version :**

Pierre PINEAU, Frédéric DAU - Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d'un matériau composite par sous-échantillonnage - 2011

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d'un matériau composite par sous-échantillonnage

## *Characterization of mechanical properties variability in a composite material with a subsampling procedure*

Pierre Pineau et Frédéric Dau

I2M, dpmt DUMAS  
UMR 5295, CNRS – Université Bordeaux 1 – Arts et Métiers ParisTech  
Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex, France  
e-mail : pierre.pineau@u-bordeaux1.fr, frederic.dau@ensam.eu

### Résumé

Dans cet article, une technique de sous-échantillonnage et d'homogénéisation destinée à rendre compte des variabilités de comportement dans les matériaux composites à l'échelle mésoscopique est présentée. Ces variabilités seront mises à profit dans des modélisations multi-échelles. La technique proposée est mise en œuvre pour caractériser le comportement transverse des plis unidirectionnels dans un Composite à Matrice Organique (CMO) stratifié. Une modélisation par la Méthode des Éléments Finis (MEF) de la microstructure est réalisée à l'échelle microscopique à partir d'une micrographie transverse d'un pli. Une partie de cette micrographie représentative du matériau (échantillon) est étudiée avec l'hypothèse de déformations planes. Une procédure d'homogénéisation d'un sous-domaine de l'échantillon est développée en post-traitement du calcul EF, réduit à trois cas de chargement élémentaires, pour obtenir les propriétés effectives du sous-domaine ou sous-échantillon. Plusieurs scénarios de sous-échantillonnage sont réalisés en faisant varier la taille et les multiples positions des sous-domaines, pour générer des distributions statistiques de propriétés élastiques. Seules les propriétés élastiques sont pour l'instant considérées à ce stade des travaux. Des aspects statistiques sont enfin mis en lumière et discutés.

### Abstract

This article presents a subsampling and homogenization technique developed to depict behaviour variability at mesoscopic scale in composite materials. This variability is intended to feed multiscale modelling at mesoscale. The technique presented here is meant to characterize the transverse behaviour of unidirectional plies in a stratified Polymer Matrix Composite. A Finite Element Method simulation is performed at microscopic scale considering the heterogeneous media, the mesh being constructed from a transverse micrograph. A part of the ply entitled the sample and supposed to be representative of the material is studied under plane strain hypothesis. A unique loading simulation, reduced to three basic load cases, is applied. Subsamples taken into the simulation cell are homogenized at post-processing level of strain and stress fields. A standard mechanics approach was considered. Various subsampling schemes are performed with various size and spatial distribution to generate statistical distributions of effective elastic properties. Some statistical aspects are highlighted and discussed.

**Mots Clés :** sous-échantillonnage, variabilité, propriétés élastiques, homogénéisation, approches multi-échelles  
**Keywords:** subsampling, variability, elastic properties, homogenization, multiscale approach

## 1. Introduction

### 1.1 Contexte

La prise en compte des variabilités à l'échelle de la microstructure, principalement générées par les procédés d'élaboration, est indispensable dans une démarche de dimensionnement fiable. Elles influent sur le comportement élastique et bien plus significativement encore sur les propriétés d'endommagement. L'étude des composites à l'échelle microscopique, *i.e.* des fibres, doit être prise en compte dans les modèles de comportement à l'échelle des plis. La démarche présentée dans ce

travail consiste à décrire la variabilité des propriétés élastiques de sous-domaines, sélectionnés dans une zone représentative d'un pli de composites à matrice organique (CMO) stratifiés, par homogénéisation et sous-échantillonnage. Cette variabilité, introduite à l'échelle micro, sera par la suite utilisée, à travers la technique de transport exposée dans [1], pour décrire la variabilité des propriétés aux échelles méso et macro et nourrir ainsi un calcul mécano-fiabiliste. En particulier, les lois de distributions obtenues sur les propriétés effectives pourront être affectées aux éléments finis de la modélisation numérique d'un pli. Les sous domaines dont on estimera les propriétés effectives, (Fig. 1.(c)) correspondront aux éléments du maillage du pli, (Fig. 1.(b)).

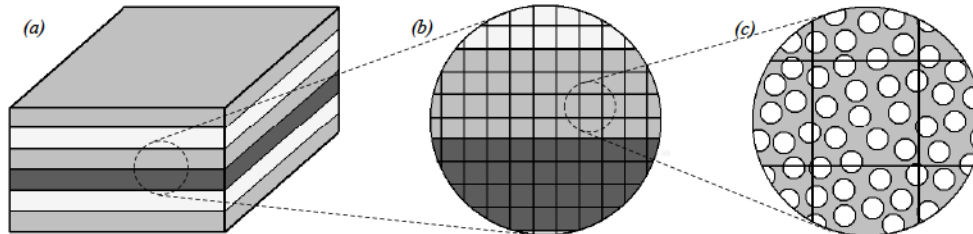


Fig. 1 : Approche multi-échelles, transport de variabilité du micro au méso

## 1.2 Sous-domaines et VER

De nombreux auteurs ont développé des techniques d'homogénéisation appliquées aux matériaux hétérogènes. La plupart du temps, le concept du Volume Élémentaire Représentatif (VER) est utilisé [2-4] : une portion représentative autorise une estimation du comportement global du matériau considéré. Pour valider ce comportement effectif, deux critères doivent être vérifiés : l'équivalence des énergies de déformation entre les deux échelles de représentation – hétérogène et homogène – décrit par le lemme de Hill [5-6] et la convergence des propriétés effectives au regard de la taille du sous-domaine [7]. D'autres auteurs ont travaillé à des tailles inférieures à celle du VER [8-9] sur des portions de matériau que nous appelons ici des sous-domaines. Leur taille réduite permet d'augmenter la quantité et la rapidité des calculs : des approches statistiques ont été développées à partir desquelles on obtient les propriétés effectives moyennes d'une population de sous-domaines et ainsi les propriétés globales du matériau.

Les propriétés effectives des VER ou des sous-domaines sont généralement obtenues par des simulations par MEF [10-12]. Des méthodes numériques variées d'homogénéisation permettent d'estimer des bornes ou des moments statistiques sur le comportement – les deux premiers moments en général. Les conditions aux limites les plus utilisées sont cinématiques (Kinematic Uniform Boundary Conditions, KUBC), en contraintes (Stress Uniform Boundary Conditions, SUBC) ou mixtes (Mixed Boundary Conditions, MBC). Des conditions périodiques sur les champs de contraintes et déformations (Periodic Boundary Conditions, PBC) peuvent être appliquées à des géométries périodiques ou non. Plus délicates à implémenter, elles donnent de meilleures estimations. Dans l'approche Embedded Cell (ECA) [13-14], la microstructure hétérogène est entourée d'une bande de matériau homogène équivalent (MHE) pour limiter les effets de bord. Les conditions sont plus naturelles sur les bords de la cellule étudiée, incluant en particulier des fibres coupées.

L'approche ECA est reprise dans ce travail et appliquée à notre domaine d'étude (ou échantillon). C'est une portion représentative de la microstructure qui est étudiée, au travers des sous-domaines, à une échelle inférieure au VER.

## 1.3 Approche développée

La démarche adoptée repose sur une procédure de sous-échantillonnage, inspirée de travaux sur l'analyse morphologique de matériaux hétérogènes aléatoires [15-16]. Elle a pour but de rendre compte de la variabilité des propriétés mécaniques à une échelle inférieure au VER. Elle est mise en œuvre à l'étape de post-traitement de calculs par MEF réalisés sur le domaine d'étude hétérogène.

La première étape concerne la modélisation numérique d'une portion du pli. Le maillage EF est construit à partir d'une micrographie transverse d'un pli unidirectionnel de CMO Carbone/Epoxy. Après des analyses d'image et reconnaissance de formes par des procédures numériques développées spécifiquement, le maillage est généré à l'aide d'outils de maillage libre, (Fig. 6). La technique ECA est employée pour limiter les effets de bord. En supposant une invariance géométrique hors-plan, le modèle mécanique retenu est en déformations planes. Seuls trois cas de chargement statique élémentaire seront simulés pour disposer des données suffisantes aux homogénéisations par sous-domaines réalisés par la suite.

La procédure de sous-échantillonnage est ensuite appliquée en phase de post-traitement du calcul MEF. Des sous-domaines (ou sous-échantillons) sont sélectionnés dans domaine d'étude, de taille nécessairement inférieure à la taille du VER. Sur chaque sous-domaine est réalisée une homogénéisation pour estimer ses propriétés effectives. La méthode d'homogénéisation utilisée autorise des conditions naturelles aux frontières du sous-domaine et repose sur la vérification du lemme de Hill [5-6].

La taille des sous-domaines est relativement proche de celles des singularités, la séparation des échelles n'est pas systématiquement observée. Pour cette raison, une taille minimale pour établir l'équivalence énergétique donnée par le lemme de Hill sera recherchée pour valider les propriétés effectives des sous-domaines.

La réalisation de l'échantillonnage permet d'élaborer des lois de distributions qui décrivent la variabilité recherchée des propriétés effectives. Plusieurs scénarios de sous-échantillonnage sont testés en faisant varier la taille et le mode de sélection spatiale des sous-domaines. La particularité du sous-échantillonnage par rapport à des approches de type Monte Carlo est de n'effectuer qu'une seule simulation numérique – trois cas de chargement en déformations planes – sur le domaine d'étude entier et une homogénéisation par sous-domaine. Cette méthode est moins coûteuse en temps de calcul MEF. Un avantage supplémentaire est la représentativité des sous-domaines qui est assurée puisqu'ils sont tirés directement du matériau. Il n'y a pas donc de statistique morphologique à traiter comme cela peut être le cas dans le cadre d'une approche de type matériau virtuel.

Une analyse statistique des distributions obtenues est menée, leur validité est discutée au regard des scénarios de sous-échantillonnages. L'effet d'inférence statistique, historiquement étudié en géostatistique [17], est en particulier mis en évidence.

## 2. Homogénéisation standard de type Hill-Mandel

### 2.1 Formalisme standard

Nous décrivons succinctement dans cette partie le formalisme utilisé pour établir les propriétés effectives par homogénéisation à partir des champs calculés dans le milieu hétérogène.

Pour un sous-domaine  $\Omega$  donné, on cherche à estimer le tenseur de comportement effectif  $C_{eff}^{\Omega}$  défini à partir des champs moyens de contraintes  $\bar{\sigma}^{\Omega}$  et de déformations  $\bar{\varepsilon}^{\Omega}$ , (Eq. 1).

$$\bar{\sigma}^{\Omega} = C_{eff}^{\Omega} \bar{\varepsilon}^{\Omega} \quad (\text{Eq. 1})$$

Dans  $\Omega$ , le champ de déformation  $\varepsilon$  du milieu hétérogène est décomposé en un champ de déformation moyen  $\bar{\varepsilon}^{\Omega}$  et un champ de déformation de perturbation  $\tilde{\varepsilon}^{\Omega}$ , (Eq. 2).

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}^{\Omega} + \tilde{\varepsilon}^{\Omega} \quad (\text{Eq. 2})$$

La perturbation est exprimée en fonction de la moyenne par un opérateur de localisation  $M^{\Omega}$  adapté de la littérature [18], (Eq.3).

$$\tilde{\varepsilon}^{\Omega} = M^{\Omega} \bar{\varepsilon}^{\Omega} \quad (\text{Eq. 3})$$

Finalement, compte tenu des Eq. 1. à Eq. 3, l'opérateur de comportement effectif s'exprime simplement à partir des opérateurs de comportement local  $C$  et de localisation, (Eq. 4):

$$C_{eff}^{\Omega} = \langle C + CM^{\Omega} \rangle_{\Omega} \quad (\text{Eq. 4})$$

## 2.2 Lemme de Hill

Le comportement effectif est associé à un Matériau Homogène Equivalent (MHE). L'énergie de déformation élastique du MHE doit correspondre à celle dans le matériau hétérogène. Cette équivalence est décrite par le lemme de Hill [5], (Eq. 5).

$$\langle \sigma \cdot \varepsilon \rangle = \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 5})$$

En homogénéisation classique, le découplage des échelles et l'application de conditions particulières aux frontières permettent de vérifier exactement le lemme de Hill. Dans notre cas, la taille des sous-domaines sélectionnés et les conditions naturelles sur les bords conditionnent l'équivalence énergétique. L'énergie résultante du produit des champs de perturbation  $\langle \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \rangle$ , pas forcément négligeable, intervient dans le déséquilibre énergétique, (Eq. 6).

$$\langle \sigma \cdot \varepsilon \rangle = \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} + \langle \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \rangle \quad (\text{Eq. 6})$$

Il convient donc de définir un indicateur d'équivalence énergétique, (Eq. 7) qui permettra d'apprécier la part relative de cette énergie selon la taille des sous-domaines considérés. Nous recherchons par la suite une taille minimale de sous-domaine au delà de laquelle cette énergie est négligeable et l'Eq.5 satisfaite.

$$e_{Hill} = \frac{\langle \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon} \rangle}{\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}} \quad (\text{Eq. 7})$$

## 2.3 Procédure numérique d'homogénéisation : propriétés effectives

Les simulations sont réalisées en 2D dans le plan perpendiculaire à la direction des fibres orientées dans le pli unidirectionnel. Une hypothèse d'invariance géométrique dans la direction des fibres permet d'utiliser un modèle de comportement en déformations planes.

Les maillages EF de la microstructure sont obtenus à l'aide d'outils dédiés. Ils génèrent des éléments finis triangulaires à interpolation linéaire du champ de déplacement à un point d'intégration.

Pour un sous-domaine  $\Omega$  donné, les champs moyens de déformations et de contraintes sont évalués à partir d'une somme pondérée des champs locaux relevés au point d'intégration de chaque élément  $E_i^{\Omega}$ . Ainsi, la déformation moyenne sur le sous-domaine  $\Omega$  s'exprime par, (Eq. 8) :

$$\bar{\varepsilon}^{\Omega} = \frac{1}{\sum_{E_i^{\Omega}} S_i^{\Omega}} \sum_{E_i^{\Omega}} S_i^{\Omega} \varepsilon(E_i^{\Omega}) \quad (\text{Eq. 8})$$

où  $(S_i^{\Omega})$  désigne la surface de l'élément  $E_i^{\Omega}$  et  $\varepsilon(E_i^{\Omega})$  la valeur de la déformation relevée au point d'intégration de l'élément. Les éléments finis du domaine découpés par la frontière sont également pris en compte. Ils sont identifiés par une procédure de test et la part de leur surface appartenant au domaine est évaluée et prise en compte dans (Eq. 8). Le tenseur de comportement effectif, défini (Eq. 4), est également exprimé par une somme discrète, (Eq. 9).

$$C_{eff}^{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\Omega} C(E_i^{\Omega}) + C(E_i^{\Omega}) M_i^{\Omega} \quad (\text{Eq. 9})$$

Dans le cas du problème de déformations planes traité ici, trois cas de chargement élémentaire, indicés *I*, *II* et *III*, sont suffisants pour déterminer les tenseurs de localisation [10]: deux de traction selon les directions respectives  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  et un cisaillement équilibré dans le plan d'étude, Fig.6.

Les déformations moyennes et perturbées obtenues pour ces trois chargements sont concaténées dans une matrice totale, notée  $\varepsilon_{tot}$ , (Eq. 10). On utilise la notation des indices contractés de Voigt, le cisaillement étant indicé 6.

$$\varepsilon_{tot} = \begin{bmatrix} \varepsilon^I & \varepsilon^{II} & \varepsilon^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^I & \varepsilon_1^{II} & \varepsilon_1^{III} \\ \varepsilon_2^I & \varepsilon_2^{II} & \varepsilon_2^{III} \\ \varepsilon_6^I & \varepsilon_6^{II} & \varepsilon_6^{III} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 10})$$

où  $\varepsilon^I = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^I \\ \varepsilon_2^I \\ \varepsilon_6^I \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon^{II} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{II} \\ \varepsilon_2^{II} \\ \varepsilon_6^{II} \end{pmatrix}$  et  $\varepsilon^{III} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{III} \\ \varepsilon_2^{III} \\ \varepsilon_6^{III} \end{pmatrix}$  représentent les champs de déformations associés

respectivement aux chargements *I*, *II* et *III*.

Ainsi, pour chaque élément  $E_i^{\Omega}$ , l'opérateur de localisation est facilement obtenu (Eq. 11) à partir de l'équation (Eq. 3).

$$M_i^{\Omega} = \tilde{\varepsilon}_{i,tot}^{\Omega} (\bar{\varepsilon}_{tot}^{\Omega})^{-1} \quad (\text{Eq. 11})$$

Cette procédure numérique a d'abord été testée sur le cas particulier d'un domaine à géométrie et champs périodiques pour lequel l'équivalence énergétique du lemme de Hill est avérée [3]. Si une erreur énergétique est relevée, elle est reliée à la qualité de l'approximation des champs dans le calcul par MEF.

Un carré de matrice contenant quatre fibres identiques réparties selon une organisation en carré est modélisé par MEF, (Fig. 3). Plusieurs finesses de maillage ont été testées en contrôlant le nombre d'éléments sur les bords – 20, 50 et 100 nœuds ; l'interface fibre-matrice est maillée avec 200 nœuds. Les sous-domaines sont des carrés représentant un quart du domaine et contenant chacun une fibre entière ou morcelée. Ils sont positionnés aléatoirement dans le domaine d'étude.

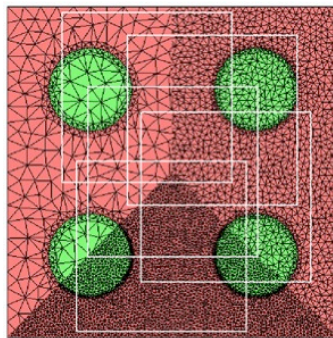
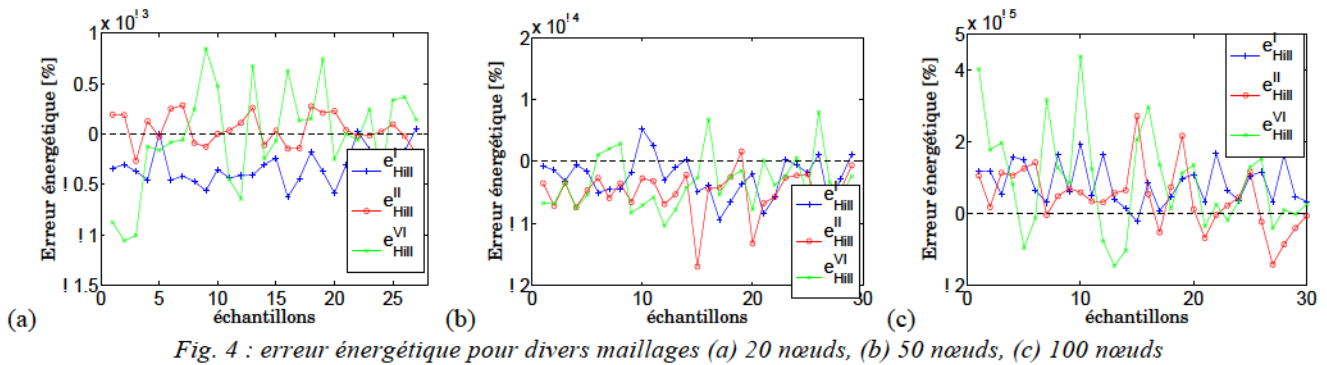


Fig. 3 : cellule de calcul périodique et localisations de sous-domaines

Les variabilités obtenues pour les propriétés effectives en fonction du positionnement des sous-domaines sont négligeables, inférieures à 0.3% pour les  $C_{ii}$ , à 0.7% pour les  $C_{ij}$ .

Par ailleurs, l'équilibre énergétique est satisfaisant. En effet l'indicateur d'erreur défini Eq. 7 donne des valeurs inférieures à  $10^{-3}$  pour le maillage à 20 nœuds, à  $10^{-4}$  pour celui à 50 nœuds et à  $5.10^{-5}$  pour celui à 100 nœuds, (Fig. 4 (a) (b) (c)).

Il est à noter que l'erreur pourrait être plus fiable avec l'emploi d'EF à interpolation quadratique.



### 3. Sous-échantillonnage et variabilité des propriétés élastiques

#### 3.1 Modélisation du pli

À partir d'une coupe transverse et après analyse d'image, la microstructure est modélisée par EF, (Fig. 5). Elle est paramétrée par la position des centres des fibres et par leurs caractéristiques géométriques sous forme d'ellipses. En terme d'échelle, les 400x900 pp du domaine (Fig. 6) correspondent à une surface de  $0.073 \times 0.171 \text{ mm}^2$ . Les fibres ont un diamètre de l'ordre de  $6.5 \mu\text{m}$ . La cellule de calcul (Fig. 6) contient le domaine d'étude dont la microstructure fibres-matrice est détaillée, entouré d'une bande constituant un Milieu Homogène Equivalent (MHE) pour limiter les effets de bord [13, 14]. Ses propriétés élastiques sont estimées par une loi des mélanges puis réajustées après une estimation des propriétés effectives.

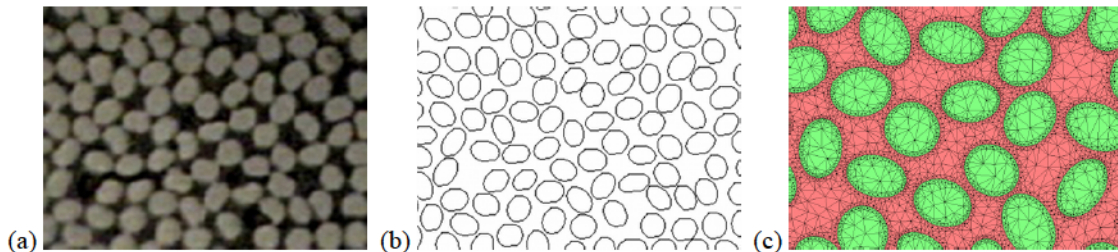


Fig. 5 : (a) micrographie du pli, (b) analyse d'image et (c) maillage EF de la microstructure

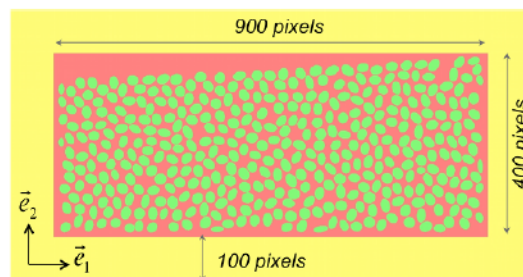


Fig. 6 : Cellule de calcul avec la bande de MHE

Le comportement des constituants est considéré linéaire élastique. Leurs propriétés élastiques sont les suivantes :

- fibres de carbone :  $E_f = 390 \text{ MPa}, \nu_f = 0.35$

- matrice époxy :  $E_m = 4.5MPa, \nu_f = 0.4$
- matériau homogène équivalent :  $E_m = 15MPa, \nu_f = 0.35$ .

Les champs de déformation et de contraintes, fortement hétérogènes, sont obtenus pour les sollicitations élémentaires de traction et cisaillement évoquées en 2.3.

### 3.2 Influence de la taille du domaine d'homogénéisation

De nombreux travaux [4,11] ont montré l'effet de la taille du sous-domaine sur le calcul de l'équivalence énergétique entre un milieu fortement hétérogène et le MHE correspondant. Des sous-domaines carrés de taille variable décrits (Fig. 7) sont homogénéisés.

Les résultats obtenus sont présentés en fonction de la demi-taille des sous-domaines, paramètre utilisé dans la procédure numérique. Ils montrent (Fig.8) que les propriétés élastiques varient significativement pour des sous-domaines de petite taille. Elles se stabilisent pour des tailles de sous-domaines plus importantes. Pour des tailles de sous-domaines voisines de l'épaisseur du pli, une légère décroissance est observée. Elle peut s'expliquer par une part plus importante de matrice dans le sous-domaine lorsqu'on se rapproche des bords du pli.

Les courbes (Fig. 9) montrent que l'erreur énergétique diminue lorsque la taille des sous-domaines augmente. La taille minimale de sous domaine est celle pour laquelle l'homogénéisation fournit des valeurs acceptables des propriétés effectives au sens de la satisfaction du lemme de Hill. Celle retenue ici est de l'ordre de 150 pixels, c'est à dire un peu moins de la moitié de l'épaisseur du pli.

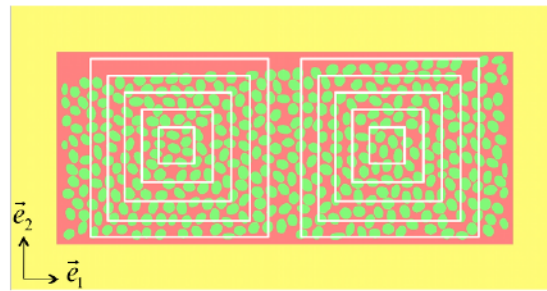


Fig. 7 : deux localisations, gauche (a) et droite (b), de sous-domaines de tailles variables

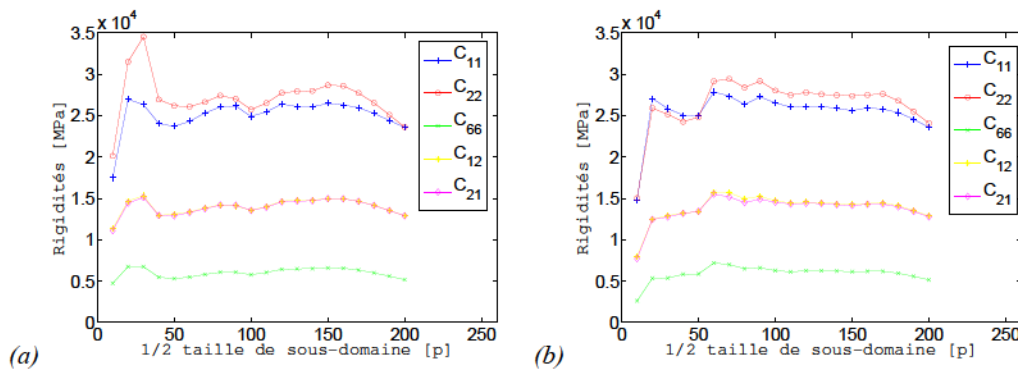


Fig. 8 : variation des propriétés effectives en fonction de la taille des sous-domaines correspondant



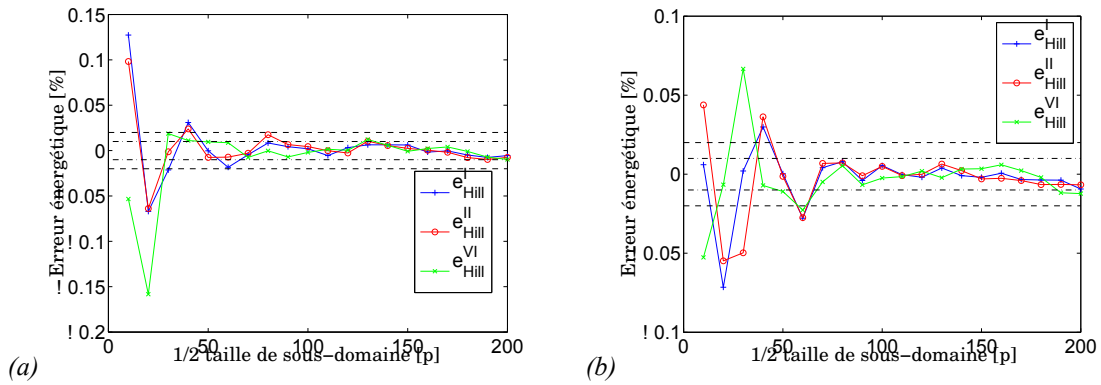


Fig. 9 : indicateur d'équivalence énergétique en fonction de la taille des sous-domaines

### 3.3 Variabilité des propriétés effectives

Plusieurs scénarios spatiaux de sous-échantillonnages ont été réalisés pour deux tailles de sous-domaines carrés de 200p et 300p de côté, supérieures à la taille minimale déterminée en section 3.2. Les résultats obtenus avec un mode d'échantillonnage régulier sont présentés ici. Le sous-domaine homogénéisé est déplacé régulièrement de 10p dans les deux directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

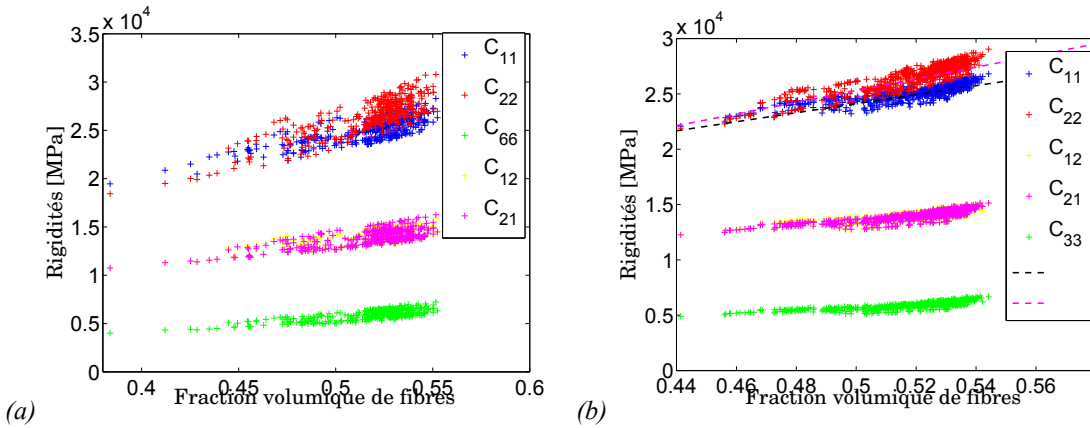


Fig. 10 : Dispersion des propriétés mécaniques (a) sous-domaine de taille 200p (b) sous-domaine de taille 300p

L'équivalence énergétique a été vérifiée avec des erreurs inférieures à 1.5% sur la totalité de l'échantillon testé. Les dispersions des propriétés effectives obtenues sont présentées (Fig. 10 (a)) en fonction de la fraction volumique  $V_f$  de fibres relevée pour chaque sous-domaine.

Deux points importants sont à noter. Premièrement et de manière logique, la dispersion est plus marquée pour les petits sous-domaines de 200p, ce en terme de  $V_f$  avec un domaine de définition plus étendu et également en terme de  $C_{ij}$  avec des spectres de dispersion plus larges. Deuxièmement, à  $V_f$  donné, une dispersion très marquée est observée, jusqu'à 10% d'écart sur les valeurs extrêmes des spectres de dispersion par rapport aux valeurs centrales du spectre. Dans d'autres travaux [9], une variabilité très faible, de l'ordre de 1%, a été obtenue pour des cellules à  $V_f$  fixé mais dont les bords étaient constitués uniquement de matrice avec des conditions aux limites de type KUBC. Les résultats obtenus ici valident une influence marquée de la présence de fibres coupées aux limites du sous-domaine d'homogénéisation et de la prise en compte de leur effet sur les conditions aux limites.

En confrontant tous les résultats pour les deux tailles de sous-domaines étudiées, des régressions linéaires par la méthode des moindres carrés donnent une loi moyenne et globale pour chaque  $C_{ij}$  en fonction du  $V_f$ . Ces droites passent à travers les spectres de dispersion (Fig. 11). Elles peuvent servir en première approximation d'indication sur la variabilité du comportement en fonction du  $V_f$ .

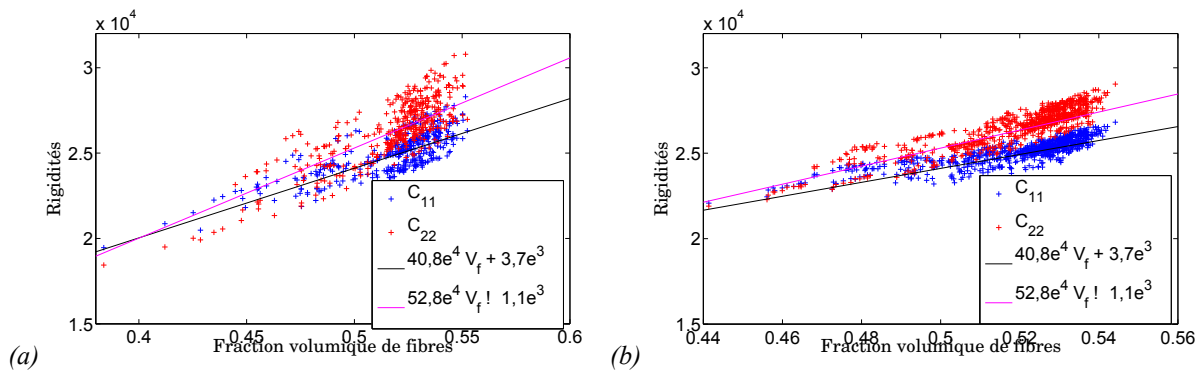


Fig. 11 : Courbes de moyenne de comportement en fonction de  $V_f$

### 3.4 Effet d'inférence statistique

Dans le but d'associer ces dispersions à des éléments dans une modélisation EF future à l'échelle du pli, il est nécessaire d'identifier les lois de distribution décrivant la dispersion des propriétés mises en évidence précédemment. Il a été montré en particulier dans la section 3.3 que la taille des sous-domaines influe sur le spectre de dispersion et a fortiori sur la fonction statistique identifiée. En statistique morphologique, il est connu que le schéma d'échantillonnage est également influant. Des sous-échantillonnages de 200p avec des recouvrements spatiaux de sous-domaines différents – 0%, 50%, 95% – ont été extraits des données obtenues précédemment.

Les fonctions de répartition du module  $C_{11}$  pour ces scénarios de sous-échantillonnage sont présentées (Fig. 12) et tracées en trait continu. Elles sont ajustées par des fonctions de distribution de type normal en trait pointillé. Ces courbes montrent tout d'abord que la distribution normale décrit correctement les variabilités obtenues. La corrélation est d'autant meilleure que la taille de la population de sous-domaines est importante, pour un mode d'échantillonnage donné ; ainsi une très bonne corrélation est obtenue avec un taux de recouvrement de 95%. En effet, plus le taux de recouvrement est faible, plus le nombre de sous-domaines qui peuvent être extraits l'est également. On observe d'ailleurs que les rigidités sont plus faibles dans ce cas puisque les quelques sous-domaines contiennent tous plus de matrice située sur les bords du domaine.

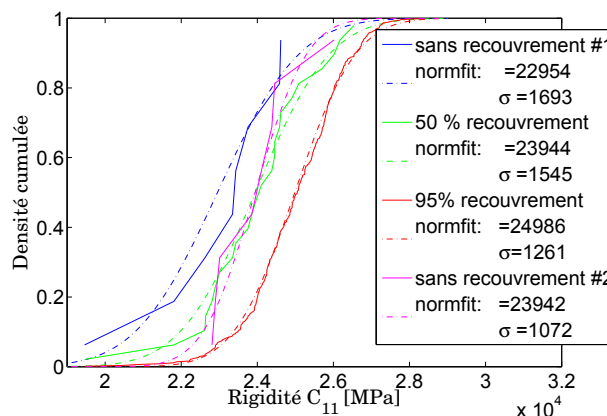


Fig. 12 : Effet de l'échantillonnage sur la variabilité des propriétés : inférence sur les prévisions

Les écarts résultant de cet effet d'inférence statistique sont du même ordre de grandeur que la dispersion. Cela montre l'effet significatif du scénario de sous-échantillonnage et pose ainsi le problème de la représentativité des données obtenues, même en partant d'une image supposée représentative de la microstructure.

## 4. Conclusion

Une procédure de sous-échantillonnage d'homogénéisation à l'étape de post-traitement de calculs par MEF d'un milieu hétérogène est proposée. Elle a pour but de rendre compte de la variabilité des propriétés élastiques effectives. Le domaine d'étude est issu d'une micrographie transverse d'un pli unidirectionnel de CMO stratifié. Le sous-échantillonnage est réalisé sur des sous-domaines de taille inférieure à la taille du VER. Sur le sous-domaine, une homogénéisation permet d'évaluer les propriétés effectives recherchées. La méthode d'homogénéisation adoptée prend en compte des conditions naturelles aux frontières du sous-domaine et repose sur la vérification du lemme de Hill [5-6]. Une taille minimale de sous-domaine a été mise en évidence pour satisfaire l'équivalence énergétique.

Cette taille identifiée, plusieurs scénarios de sous-échantillonnage ont mis en lumière la variabilité des propriétés effectives. Cette variabilité est d'autant plus marquée que la taille des sous-domaines est faible. À fraction volumique donnée, une variabilité marquée, de l'ordre de 10% par rapport à la valeur moyenne est apparue. Cet effet est attribué à la disposition aléatoire des fibres dans la matrice et surtout à la présence de fibres coupées sur les bords qui entraîne des champs de contraintes et déformations très singuliers. De plus, il est apparu que le mode d'échantillonnage, traduit ici en terme de recouvrement et de taille de sous-domaine, influe très fortement sur les fonctions statistiques obtenues ; l'effet d'inférence statistique est mis en évidence.

Ce travail constitue la première étape d'une approche globale micro-méso-macro de modélisation du comportement mécanique et de propagation d'incertitudes. L'analyse géomorphologique de la microstructure est envisagée pour de futurs travaux. Il s'agira de mettre en évidence des indicateurs statistiques sur les sous-domaines et de les relier explicitement à ceux du comportement effectif. Des simulations multi-échelles micro-méso, puis vers le macro, seront développées à partir de la variabilité mise en lumière dans cet article. L'effet de la microstructure sur la variabilité des endommagements, spécifique aux matériaux composites et plus généralement aux matériaux multi-structurés, sera également modélisé.

## Références

- [1] F. DAU, A. ALZINA, L. GUILLAUMAT, « Uncertainties propagations of composite mechanical properties from micro to macro scale ». in *ECCM13 Proceedings, (Stockholm, Sweden 2008)*,
- [2] K. SAB, « On the homogenization and the simulation of random materials ». *European Journal of Mechanics A/Solids* (1992) Vol 11-5, pp. 585-607,
- [3] C. HUET, « Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies ». *J. of the Mechanics of Physics and Solids*, (1990) Vol. 38-6, pp.813-841,
- [4] T. KANIT, S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY, D. JEULIN, « Determination of the size of the RVE for random composites : statistical and numerical approach », *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 40, pp 3647-3679,
- [5] R. HILL, « Elastic properties of reinforced soils : some technical principles ». *J. of the Mechanics of Physics and Solids*, (1963) Vol. 11, pp. 357-372,
- [6] E. SANCHEZ-PALENCIA, A. ZAOUI, editors *Lecture Notes in Physics*, Vol. 272, Springer-Verlag, Berlin,
- [7] D. TRIAS, J. COSTA, A. TURON, JE. HURTADO, « Determination of the critical size of statistical RVE for carbon reinforced polymers ». *Acta Materialia*, (2006) Vol. 54, pp. 3471-3484,
- [8] S. SHKOLLER, « An approximate homogenization scheme for non-periodic materials ». *Computer and Mathematics with Applications*, (1993) Vol. 33-4, pp. 15-34,
- [9] R. CHERMANEANU, L. GUILLAUMAT, F. DAU, « Uncertainties propagation in composite materials ». in *JNC16 Proceedings, (Toulouse, France, 2009)*,
- [10] SJ. HOLLISTER, JM. BRENNAN, N. KIKUCHI, « A homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress ». *J. of Biomechanics*, (1994) Vol. 27-4, pp. 433-444,
- [11] G. CAILLETAUD, S. FOREST, D. JEULIN, F.FEYEL, I. GALLIER, V. MOUNOURY, S. QUILICI, « Some elements of microstructural mechanics ». *Computational Material Science*, (2003) Vol. 27, pp. 351-374,
- [12] S. SAKATA, F. ASHIDA, M. ZAKO, « Kriging based approximate stochastic homogenization analysis for composite materials ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, (2008) Vol. 197, pp. 1953-1964,
- [13] JR. BROCKENBROUGH, S. SURESH, HA. WIENECKE, « Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape ». *Acta Metallurgica et Materialia*, (1991) Vol. 39-5, pp. 735-752,
- [14] D. TRIAS, J. COSTA, JA. MAYUGO, JE. HURTADO « Random models versus periodic models for fibre reinforced composites ». *Computational Material Science*, (2006) Vol. 38, pp. 316-324,

- [15] SN. LAHIRI, MS. KASER, N. CRESSIE, NJ. HSU, « Prediction of spatial cumulative distribution functions using subsampling». *J. of the American Statistical Association*, (1999) Vol. 94-445, pp. 86-97,
- [16] DN. POLITIS, M. SHERMAN, « Moment estimation for statistics from marked point process». *J. of the Royal Statistical Society B*, (2001) Vol. 63 part 2, pp. 261-275,
- [17] BD. RIPLEY, *Statistical inference for spatial process*, Cambridge University Press, 1998,
- [18] SJ. HOLLISTER, N. KIKUCHI, « A comparison of homogenization and standard mechanics analysis for periodic porous composites». *Computational Mechanics*, (1994) Vol. 27-4, pp. 73-95,